物理学の迴廊

西島和彦監修

力学系と自然法則

西島和彦著

産業図書

は し が き

この本は高校程度の物理と数学を勉強した人にもう一度力学についてゆっくりと考えてもらうことを目的として書かれたものである．大学に入ると，理科系の人は力学を習うことになっている．力学は古典物理学の出発点であり，力学と電磁気学とをしっかり学ぶことによって古典物理学の基礎が出来上がる．これが最も正統的な勉強方法であろう．

ところで高校では微積分を習うのに，なぜか物理に応用することが禁じられている．そのために統一的に導き出せる多くのことを，各個別々に覚えなければならない．せっかく高校で習った微積分であるから禁を冒してでも物理に応用してみたらどうだろう．それによって高校で習う物理もずっと統一がとれて見通しがよくなる．そこで一つこの禁断の木の実を味わってみようというのがこの本の目的の一つである．

また高校では深くはないにしても，古典物理学だけでなく現代物理学，特に原子・分子のこと等を学ぶ．そこで古典力学を学ぶには二通りの方法がある．一つは伝統的な方法で，昔の人，特にNewtonらが力学を建設した方法を忠実に踏襲するものである．自然法則の探求という仕事はかつてEinsteinとInfeldとによって偉大なる探偵物語に譬えられたことがある†．もちろん我々は未だ犯人を捕えてはいないことになる．しかしながら今までに多くの手掛りを見つけたことは確かである．そう考えてみると高校で習ったことは，最近までに見

† アインシュタイン・インフェルト著，石原純訳「物理学はいかに創られたか」上巻，下巻，岩波新書，50，51．

つけられた手掛りを含む探偵物語を斜めに読んでいったことに相当するであろう．これからこの本でやろうとしていることは，この探偵物語をもう一度じっくりと読むようなものである．すると古典力学を古典的な方法で勉強するというのは，ある程度犯人の見当がついているのにまるで知らないような顔をして探偵物語を読まされるようなことで，何となく白けてしまう．そこでこの本では第2の立場をとることにする．すなわち，我々は古典力学を，現代物理学で知られた手掛りに基づいて見直すという方法を選ぶことにする．その結果，時代劇と現代劇とをちゃんぽんに見ているような印象を受けるかもしれない．

この本では力学の個々の問題を解くということについてはあまり熱心にはやっていない．その代り，多数の解の間の相互関係を明らかにするという仕事に重点をおいた．また解析力学はこの本の対象ではないが，実用上の必要から Lagrange の方程式までは導入した．Hamilton の方程式については統計力学とか量子力学との関連で勉強する方が有効であろう．この本で使う数学はなるべく高校程度のものですませるように努力したが，一つ例外がある．それは偏微分であり，これなしには力学は語れない．適当な数学の本で勉強されることをお薦めする．

1978年10月

西島和彦

目　　次

第 1 章

運動法則の存在

1-1　自然法則の存在の認識

我々の世界における森羅万象が一定の法則に従っているという事実はかなり古くから認識されていた．古代の天文学等は農耕の必要性から生じたものであろうが，これはそのよい一例であろう．ギリシャ時代には既にかなり系統的な研究が行われていた．しかしながら石器時代においても既に無意識にではあったろうが，その存在は認識されていた．たとえば狩人が動物に対して槍を投げたり，弓を射たりするときに，一定の初期条件の下には一定の結果が生じることを信じたうえで狩猟をしていたに違いない．

もちろん古代においては因果関係の誤った解釈が多かったので多くの迷信が生まれ，科学と迷信，あるいは宗教が混然としていたに違いない．しかしながら同じ条件の下に同じ結果が生じるということを信じることこそ自然法則の存在の認識の第一歩であった．

この本では，力学を中心として自然法則について議論するが，力学はGalilei とか Newton らの天才達によって創られた自然法則探求の典型的な例と考えられる．力学建設の初期において重要な役割を果たしたのは疑いもなく重力であろう．Galilei の研究は重力と関係したものが多いし，Newton の研究でも万有引力は中心的な役割を果たしている．Newton はある年に London で流行した悪疫を避けて田舎へ行き，りんごが自然に落ちるのを見て万有引力という概念に到達したといわれている†．また今世紀になってからも重力の理論は Einstein によって再検討され，一般相対論という荘大な理論体系が築かれた．

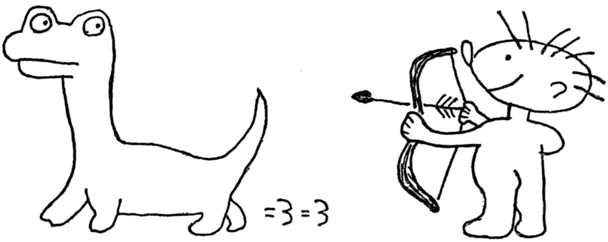


図 1-1　古代人の狩猟
古代人でも一定の初期条件の下に一定の結果が生じることを知っていた．すなわち，自然法則の存在を無意識の中に信じていたことになる．

1-2　Newton の運動法則

我々も力学の法則を定式化してゆくのに重力から始めよう．自然現象，たとえば地球表面における物体の重力による落下等について実験を行って，その法則を抽出するには二つの重要な要素がある．一つは，たとえば落体の法則のような一般的法則の存在であり，もう一つは，境界条件あるいは初期条件である．法則はただ一つであっても色々な条件により，あるいは実験の仕方により結果は様々である．たとえば石が静止状態から手を放れて落ちた場合と，上へ

† 最近知ったことであるが，このりんごの木の子孫がイギリスから日本へ贈られ，小石川の植物園に植えられているとのことである．

投げ上げられた場合とでは明らかに運動の様子は違ってくる．すなわち，石を投げるという行為に対しても色々と調節のできるパラメターが存在する．具体的には，初めの高さと初めの速度である．ここでは Galilei にならって色々な実験を繰り返して，その結果実験式が得られたとしよう．石の地表からの高さを z として，それを投げた瞬間からの時間 t の関数として表現すると

$$z=z_0+v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{1-1}$$

ただし z_0 は初めの高さ，v_0 は初速度の z 成分である．したがって z_0 と v_0 とは初期条件を表わす量である．さて落体の法則は，初期条件とは独立な形で与えられなければならないから，z_0 と v_0 とは消去してやらなければならない．そのためには通常微分を用いる．(1-1) 式の z を t について2回微分すると

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-g \tag{1-2}$$

ここに g は地表での落体を支配する普遍的な定数であり

$$g=9.8\,\mathrm{m/sec^2}$$

という値をもっている．(1-2) が落体の法則を与える．もちろんこれは，地表という限られた環境でのみ成り立つ制限された運動の法則である．このようにどんな物体でも同じ加速度をもって地表へ落ちるという結果は Galilei が有名な Pisa の斜塔を用いて行った有名な実験から結論されたものである†．この法則を更に一般化するためには，更に Newton の運動の法則および重力の性質を支配する法則に進まなければならない．しかしながら (1-2) は両者を組み合わせたものであるから，もっと色々な実験をして両者を分離し，更に抽象化の度合を進めなければならない．

この経過を Newton に従って再現することは難しい．それは質量とか力のように独立に定義することが難しい概念が含まれているからである．

さて石が地表に落ちるのはなぜか？　これも簡単に答えられる問題ではない．Newton はりんごが落ちるのを見て万有引力の法則を思いついたというが，凡人ではなかなかここまで気がつかない．そこで Newton に従って，石やりんごが地表に落ちるのは地球が引っぱっているからであると考えることに

† Pisa の斜塔の入口には，この塔でこの有名な実験が行われたという文章が刻まれている．

しよう．そこでgという加速度が生じる原因は地球の引力であると考えられることになる．

それでは地球の引力の影響がだんだん小さくなったらどうなるであろうか？ここで万有引力に関する知識が必要となるが，地球から大変に遠ざかれば石に対する地球の引力はどんどん小さくなると考えてよいであろう．しかし地球以外の天体の影響もあるかもしれない．そのときには太陽系から非常に遠くへ行けば，太陽系の引力圏外に出られるであろう．それではそのような場所では，(1-2) の右辺に出てくるgは大変小さくなり無視できるであろう．このときに，地球の代りに太陽系に固定した座標系から見れば，太陽系以外の星の影響を無視できるとして (1-2) 式は次の式でおき換えられることになる．

$$\frac{d^2z}{dt^2}=0 \tag{1-3}$$

このように他の物体の影響を無視できる環境では，(1-3) 式を一般化して次のように書いてもよいであろう．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)=0 \tag{1-4}$$

この式は速度ベクトルが時間的に一定であることを意味する．ただし速度ベクトルは次の式で与えられる．

$$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right) \tag{1-5}$$

したがって他の物体からの影響が無視できるような空間においては孤立した物体は等速度運動をすると結論できる．ところで物体とは何であろうか？　これについて議論をすればきりがないので，このようなことを議論するときには理想化ということを行う．色々な物体を考えたときに，それぞれの物体は種々雑多な性質をもつが，ここではその性質の中で必要なものだけを残して他の性質については完全に無視することにするのである．ここで問題となるのはその物体の座標のみである．物体に大きさがあるとその座標の定義が不明確になるのでこの物体を点でおき換えてしまう．力学で大切なもう一つの量は質量である．ここで質量とは何かという問いには答えないことにする．そして我々は，この物体の座標と質量のみを残して他のすべての性質を無視することにする．このように理想化された物体を質点と名づける．以下では質点の運動を論ずる

ことにする．

実際の物体には大きさとかその他色々な性質があるから，その運動を論ずるときにはそれぞれの性質を考慮した補正をしなければならないが，ここではそのような考慮は払わないことにする．質量については加法的な量であることのみを仮定する．物体Aと物体Bとがくっついて出来た物体の質量は，それぞれの物体の質量の和であるとする．そうするとこのような理想化された質点の運動について次のような法則を得る．“他の物体からの影響を無視できるような空間においては，質点は等速度運動をする”．これを Newton の第一法則，あるいは慣性の法則と呼ぶ．

さてこの質点が再び太陽系，あるいは更に地球に近づけば，質点の運動はこれらの天体の引力によって等速度運動からずれるであろう．このように速度の変化を生じさせる原因となるものを力と称する．同一の力が加えられても速度の変化はその質点の質量によって異なる．力と質量とを別々に定義することは難しいので，まず与えられた力の下での質点の加速度を与える経験法則を書く．

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F} \tag{1-6}$$

ただし $\boldsymbol{r}$ は三次元の位置ベクトルで，その成分は

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z) \tag{1-7}$$

により与えられる．また $\boldsymbol{F}$ は質点に与えられる力を表わすベクトルであり，mは質点の質量を表わす．(1-6) 式が Newton の第二法則である．

これを落体の法則 (1-2) と比べると，地表での重力は

$$\boldsymbol{F}=(0,0,-mg) \tag{1-8}$$

で与えられ，重力は質点の質量に比例することになる．このことから質量の大きさは重力を利用して測定できることがわかる．さて (1-2) 式で表わされる落体の法則は，(1-6) 式で表わされる運動の第二法則と重力の性質を表わす (1-8) 式とに分解されたことになる．そして我々が考えなければならない問題は，運動方程式 (1-6) を解く力学の問題と，重力の法則 (1-8) をいかにして導き出すかという問題とに分解される．後者の問題に答えるには重力場の理論が必要であり，したがって力学の範囲外の問題となる．似たようなものに荷電粒子

に働く電磁的な力があり，その力の法則を導くのは電磁場の問題となる．与えられた力の下で質点がどのような運動をするかを論ずるのは力学の問題であるが，その力がどのようにして生じるかを議論するのは一般的には場の理論の問題となる．

我々は外力の影響の無視できる空間に座標系を設定して，この座標系に関して質点は等速度運動をすると考えた．このような座標系がいわゆる慣性系である．このような系において，複数個の質点が存在すれば質点同士がお互いに力を及ぼし合うことになり，i 番目の質点が j 番目の質点に与える力を $\boldsymbol{F}(i\to j)$ と書くことにすると

$$m_j \frac{d^2\boldsymbol{r}_j}{dt^2}=\sum_{i\neq j}\boldsymbol{F}(i\to j) \tag{1-9}$$

が j 番目の質点の運動方程式となる．

さて Newton の作用反作用の法則，あるいは Newton の第三法則は次の式で与えられる．

$$\boldsymbol{F}(i\to j)=-\boldsymbol{F}(j\to i) \tag{1-10}$$

これはもちろん他の法則とは独立である．Newton の三つの法則は経験に基づいており，数学的に導き出すことはできない．我々に証明できるのは法則全体の自己無矛盾性のみである．このことは以下において具体例により示される．

第 2 章

運　動　学

2-1　力学系の自由度

前章において導入した質点系の運動を完全に記述するにはそれぞれの質点の座標を時間の関数として表わさなければならない．すなわち，

$$\boldsymbol{r}_i(t)=(x_i(t), y_i(t), z_i(t)), \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{2-1}$$

ただし n は質点の個数であり，我々は $3n$ 個の時間の関数を知らなければならない．この $3n$ をこの系の自由度と呼ぶ．場合によっては，これらの座標に対して拘束条件がつけられることがある．たとえばある質点がある曲面上にのっているというような条件がつくことがある．このようなときには独立な変数の数をこの系の自由度と呼ぶ．自由度 f の系に対して初期条件を設定するには f 個の変数およびその時間微分（速度の成分）を与えなければならないから $2f$ 個の初期条件が必要となる．

さて石のような物体を，小さければともかく，質点として扱うのは大変乱暴

な近似のように思われる．このようなときには，これを多数の質点の集団と考えるが，取扱いを簡単にするために変形しないという拘束条件をおき，その自由度を減らす．その結果この石の自由度は，重心の座標の3と，重心の周りの回転に対応する3とで合わせて6になる†．このように変形の自由度を拘束条件で凍結した質点系を剛体と呼ぶ．剛体の概念は質点と同様に明らかに理想化の例である．このような理想化が現実の物質に対してどのような近似になっているかについては第4章に述べることとする．

2-2 ベクトルとは

質点，あるいは剛体の重心の座標，その速度などは三次元ベクトルを形成するので，ここにベクトルに関する簡単な知識をまとめておくことにしよう．いま三次元空間における直交座標系を考える．いま原点 O を与えて，O を通りお互いに直交する3直線を選び，それぞれを x 軸，y 軸，z 軸と名づける．この際に座標系は，x，y，z の3軸の選び方により右手系と左手系とに分類される．すなわち，右手の親指を x 軸と，そして人差指を y 軸と重ねたときに，中指を両者に垂直な方向に向けたとしてそれが z 軸の方向と一致するならば，この座標系を右手系と呼ぶ．同様に左手に対して同上のことをしたときに中指の方向が z 軸の方向と一致したならばこれを左手系と呼ぶ．この右手系と左手系とをいかにして区別するかは実は難しい問題であり，第 11 章で詳しく議論される．

さて原点Oから x 軸に沿って x 方向に x だけ進み，その点から y 方向に y だけ進み，更にその点から z 方向に z だけ進んで点Pに到達した場合に，この点Pの x 座標，y 座標，z 座標はそれぞれ x，y，z であるという．座標を指定した点 P は，$\mathrm{P}(x, y, z)$ のように表わされる．当然原点 O は $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ で与えられる．

三次元ベクトルを太文字，あるいは矢印をつけた文字で表わす．すなわち

$$\boldsymbol{r}, \quad \text{または} \quad \vec{r}$$

ベクトルは長さ，方向および向きをもち，三次元空間で一つの方向の線分で表

† このことは後に第5章で証明する．

わすことができる．ベクトルは平行移動をしても同じベクトルであると定義する．あるベクトルを平行移動して，矢印のついていない方の端を原点に重ね，反対の矢印のついた方の端の重なる点を P としたときに，その座標が x, y, z となれば，x, y, z を与えられたベクトルの x 成分，y 成分，z 成分と呼び，次のように表わす．

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x, y, z) \tag{2-2}$$

明らかにこの成分は座標系の選び方による．それに反して，質量とか，ある点における温度とかは座標系の選び方によらない．このような量をスカラー量と呼ぶ．

次にベクトルに対して加法を定義する．

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の成分がそれぞれ

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3), \qquad \boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$$

で与えられるときに，その和を次式で定義する．

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \tag{2-3}$$

またベクトルの 2 倍，3 倍等の通常の数の乗法を

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \tag{2-4}$$

で定義する．さて $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を定義するのに特定の座標系を用いたが，この結果としての和は座標系の選び方によらない．ベクトル $\boldsymbol{a}$ の始点，すなわち矢印の

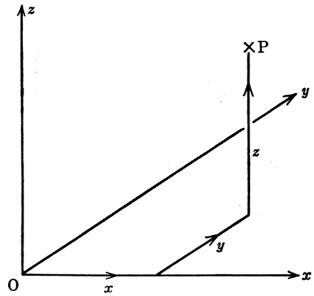


図 2-1　直交座標系と与えられた点 P の座標

原点Oから x 方向に x だけ進み，次に y 方向に y だけ進み，更に z 方向に z だけ進んで点 P に到達するときに，点 P の座標を (x, y, z) と書く．

ない方の端を平行移動で O に重ね，ベクトル $\boldsymbol{b}$ の始点を $\boldsymbol{a}$ の終点，すなわち矢印のついた点に重ねると，O から $\boldsymbol{b}$ の終点へ向かうベクトルが $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ になるからである．明らかにこの定義は原点の選び方にのみより座標系の選び方によらない．更に O を変えても全体が平行移動するだけであるから，O にもよらないことになる．すなわち，座標系を変えればベクトルの成分は変わるが，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とを与えたときに $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ は一義的に決まることになる．特に3成分が全部0となるベクトルを零ベクトルと呼び，$\boldsymbol{0}$ と書く．すると任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a} \tag{2-5}$$

さて数学の言語を使えば，三次元ベクトル全体の集合 $\mathcal{V}$ は加法に対して群を作る．

1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが $\mathcal{V}$ に属すれば，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ も $\mathcal{V}$ に属する．また

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.\ \text{（加法の定義）}$$

2) また加法は結合則を満たす．

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

3) $\mathcal{V}$ の任意の要素 $\boldsymbol{a}$ に対して，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$ となる要素 $\boldsymbol{0}$ が存在する．（単位元の存在）

4) $\mathcal{V}$ の任意の要素 $\boldsymbol{a}$ に対して，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{a}$ の逆元 $-\boldsymbol{a}$ が存在する．（逆元の存在）

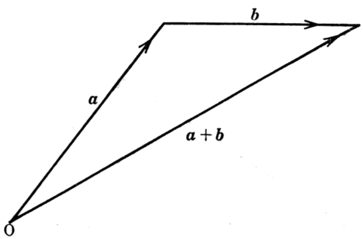


図 2-2 ベクトルの加法

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の始点を O に重ね，ベクトル $\boldsymbol{b}$ の始点を $\boldsymbol{a}$ の終点に重ねたときに，O と $\boldsymbol{b}$ の終点とを結ぶベクトルが $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を表わす．

さて一点 P に対して，原点 O と P とを結ぶベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を点 P の位置ベクトルと呼ぶ．Pを質点の位置とすれば，ベクトル $\boldsymbol{r}$，(2-2) 式，が質点の位置を示し，その成分が質点の座標となる．次にベクトルを単位ベクトルで表わそう．(2-3) 式と (2-4) 式とを組み合わせると

$$(x, y, z)=(x, 0, 0)+(0, y, 0)+(0, 0, z)$$
$$=x(1, 0, 0)+y(0, 1, 0)+z(0, 0, 1) \qquad (2\text{-}6)$$

さてベクトル (1,0,0)，(0,1,0)，(0,0,1) はそれぞれ x 方向，y 方向，z 方向を向いた長さ1のベクトルであり，これらを単位ベクトルと呼び，それぞれ $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ と書く．

$$\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0), \qquad \boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0), \qquad \boldsymbol{e}_3=(0, 0, 1) \qquad (2\text{-}7)$$

そうすれば

$$\boldsymbol{r}=(x, y, z)=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3 \qquad (2\text{-}8)$$

一つの座標系は原点 O と三つの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ で決定される．

2-3　内積あるいはスカラー積

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ が与えられたときに，それぞれの始点を一致させてその間の角を θ とし，またそれぞれの長さを a，b としたときに $ab\cos\theta$ を二つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の内積と呼び，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，あるいは単に $\boldsymbol{ab}$ 等と記す．

長さ a，b およびその間の角 θ は座標系の選び方によらないから内積は座標系によらず，したがってスカラーとなるので，内積はスカラー積とも呼ばれる．そこで明らかに

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \qquad (\text{対称性}) \qquad (2\text{-}9)$$

また内積に対して次の分配則が成り立つ．

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \qquad (\text{分配則}) \qquad (2\text{-}10)$$

これを証明するために，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とのなす角を θ_1，θ_2，θ とすると，点 A，B を図2-3のように選んだときに

$$a\cos\theta_1=\overline{\mathrm{OA}}, \qquad b\cos\theta_2=\overline{\mathrm{AB}}, \qquad d\cos\theta=\overline{\mathrm{OB}}$$

となる．ただし a，b，d はそれぞれベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ の長さであり，上式

で $\overline{\mathrm{OA}}$ その他は正または負の長さである．すると代数的な関係式 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OB}}$ より

$$a\cos\theta_1+b\cos\theta_2=d\cos\theta$$

この式に c を乗じると

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=dc\cos\theta=ac\cos\theta_1+bc\cos\theta_2=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$$

となって (2-10) 式が証明されたことになる．同様にして

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \tag{2-11}$$

したがって (2-10) と (2-11) とを組み合わせると

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\qquad(\text{線形性})$$

さて定義から $\boldsymbol{r}$ の長さ r は，$r^2=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}^2$ となる．これを成分で表わしてみよう．$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ はお互いに直交するし，その長さは1である．二つのベクトルが直交すれば $\cos 90°=0$ よりその内積は0となるから

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij},\qquad (i,j=1,2,3) \tag{2-12}$$

ただし δ_{ij} は Kronecker の記号と呼ばれ，

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\ \text{のとき}\\ 0, & i\neq j\ \text{のとき}\end{cases} \tag{2-13}$$

を表わすものとする．さてベクトル (2-8) に対して線形性と (2-12) の直交条件より

$$r^2=(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3,x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3)$$

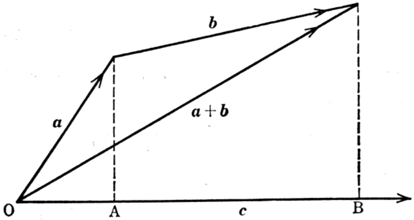


図 2-3　内積の分配則

三つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が与えられたときに，点Oをベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ との始点に選ぶ．$\boldsymbol{b}$ の始点は $\boldsymbol{a}$ の終点に重ね，$\boldsymbol{a}$ の終点と $\boldsymbol{b}$ の終点とのベクトル $\boldsymbol{c}$ 上への正射影をそれぞれ A，B とする．また $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とのなす角をそれぞれ θ_1, θ_2, θ とすると本文にあるような関係が成り立ち，内積の分配則が証明される．

$$=x^2+y^2+z^2 \qquad \text{(Pythagoras の定理)}$$

次に $\boldsymbol{r}$ を異なる直交座標系で表現してみよう.

$$\boldsymbol{r}=x'\boldsymbol{e}_1'+y'\boldsymbol{e}_2'+z'\boldsymbol{e}_3' \tag{2-8'}$$

この $\boldsymbol{e}'$ についても (2-12) を用いると上と同様に

$$r^2=x'^2+y'^2+z'^2$$

となり，この組合せは直交座標系の選び方によらない不変量であることがわかる．同様に内積についても

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$
$$=a_1'b_1'+a_2'b_2'+a_3'b_3' \tag{2-14}$$

で与えられ，この形の積が直交座標系の選び方によらないことを示す.

2-4 外積あるいはベクトル積

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ があるときに，その外積あるいはベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は次のようなベクトルである．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との長さをそれぞれ a, b とする．また両者の始点を一致させたときに両者のなす角を θ としたときに，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の長さは $ab\sin\theta$，方向は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両者に垂直，向きは $\boldsymbol{a}$ の方向に右手の親指，$\boldsymbol{b}$

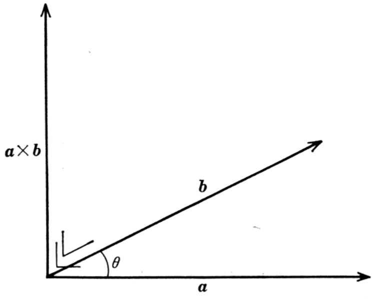


図 2-4 外積の定義

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の始点を一致させてその間の角を θ とする．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は次のようなベクトルである．長さは $ab\sin\theta$，方向は $\boldsymbol{a}$ にも垂直，$\boldsymbol{b}$ にも垂直であり，向きは $\boldsymbol{a}$ の方向に右手の親指，$\boldsymbol{b}$ の方向に人差指を重ねたときに両者に垂直な中指の向きである．定義から明らかにこのベクトルは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ について反対称である.

の方向に人差指を重ねたときに両者に垂直な中指の向きである．定義から明らかに

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \qquad \text{（反対称性）} \qquad (2\text{–}15)$$

この定義は直交座標系の選び方にはよらないが，それが右手系であるということは大切である．また外積に対しても分配則が成り立つ．

$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b} \qquad (2\text{–}16)$$

この関係を証明するには，上のベクトルはいずれも $\boldsymbol{c}$ に垂直であることを利用する．そこで $\boldsymbol{c}$ を紙面に垂直で紙面から手前の方に向いているベクトルであるとする．ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の紙面への射影を $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ とするといずれも紙面内にあることになる．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ および $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ の長さを a, b, d とし，また $\boldsymbol{c}$ となす角をそれぞれ θ_1, θ_2, θ とすると，紙面への正射影の長さは $a\sin\theta_1$, $b\sin\theta_2$, $d\sin\theta$ である．そこで $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ を作ると，この紙面内で $\boldsymbol{a}'$ を正の方向に 90° 回転させてその長さを c 倍したものである．ところで $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$ を 90° 回転させて c 倍してもその間の関係は変わらないから (2–16) が成り立つことになる．この結果はやはりベクトルであるので，外積をベクトル積と

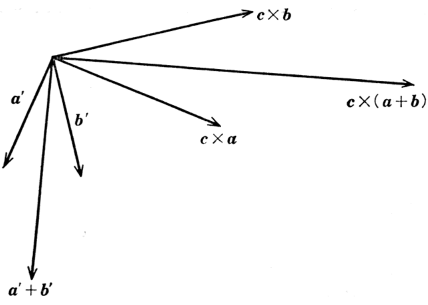


図 2-5　外積の分配則

$\boldsymbol{c}$ を紙面に垂直でかつ紙面から手前の方に向いているベクトルであるとする．ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の紙面への射影を $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ とするといずれも紙面内にある．$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ というベクトルは $\boldsymbol{a}'$ を c 倍して正の方向に 90° 回転したものである．$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$ についても $\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ についても同様である．そこで $\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'=(\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}')$ より直ちに

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

が導かれる．

もいう．(2-15) 式を用いると

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} \tag{2-17}$$

も成り立つ．同様に

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} \qquad \text{(線形性)}$$

さて定義から明らかに

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0 \tag{2-18}$$

次にベクトル積を成分で表わすと，定義より直ちに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2&=-\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3&=-\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1&=-\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2\end{aligned} \tag{2-19}$$

また (2-18) より

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_i=0 \tag{2-20}$$

この結果をまとめて次のごとく書ける．

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{2-21}$$

ただし

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & (ijk)\text{ が }(1\ 2\ 3)\text{ の偶置換のとき}\\ -1, & (ijk)\text{ が }(1\ 2\ 3)\text{ の奇置換のとき}\\ 0, & \text{それ以外のとき}\end{cases} \tag{2-22}$$

偶置換，奇置換は次のように定義される．1 2 3 の順序を変えるのに一対の数字を入れ換える操作を繰り返すことにより任意の順序に並べ変えられる．たとえば

$$1\ 2\ 3\rightarrow3\ 2\ 1\rightarrow2\ 3\ 1$$

$$1\ 2\ 3\rightarrow2\ 1\ 3\rightarrow3\ 1\ 2\rightarrow3\ 2\ 1\rightarrow2\ 3\ 1$$

この入換え方は種々あるが，1 2 3 から他の順序，たとえば 2 3 1 へ移るには常に偶数回，あるいは常に奇数回の入換えが必要である．偶数回の入換えを偶置換，また奇数回の入換えを奇置換と呼ぶ．それ以外のものとは，たとえば $ijk=112$ のように入換えでは得られないものを意味する．さて

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$$

として上の演算規則を適用すると

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3 \qquad (2\text{–}23)$$

が得られる．この結果を重ねて用いると

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=0 \qquad (2\text{–}24)$$

外積に対しては結合則が成り立たず，上の式が結合則の代りとなり，Jacobi の恒等式と呼ばれる．ベクトル積では一般に $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ とは異なる．

2-5 ベクトルの直交系展開

次にベクトル $\boldsymbol{r}$ の直交系展開 (2-8) を考え，これと $\boldsymbol{e}_j$ との内積を作ると，

$$x=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1),\qquad y=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_2),\qquad z=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_3) \qquad (2\text{–}25)$$

したがって (2-8) 式は次のように書き換えられる．

$$\boldsymbol{r}=\sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j \qquad (2\text{–}26)$$

これをベクトル $\boldsymbol{r}$ の直交系展開と呼ぶ．これは任意の直交系に対して成り立つから，他の単位ベクトルの組に対しても (2-26) が成り立つ．

$$\boldsymbol{r}=\sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}'_j)\boldsymbol{e}'_j \qquad (2\text{–}27)$$

この直交系展開を利用して，係数 x, y, z が座標変換に対していかに変換されるかを調べることができる．さて一つのベクトル $\boldsymbol{r}$ を二つの直交系で表わす．

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3=x'\boldsymbol{e}'_1+y'\boldsymbol{e}'_2+z'\boldsymbol{e}'_3$$

この式と $\boldsymbol{e}'_j$ との内積をとると次の座標変換の式を得る．

$$\begin{aligned}x'&=x(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}'_1)+y(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}'_1)+z(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}'_1)\\y'&=x(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}'_2)+y(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}'_2)+z(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}'_2)\\z'&=x(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}'_3)+y(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}'_3)+z(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}'_3)\end{aligned} \qquad (2\text{–}28)$$

同様に $\boldsymbol{e}_j$ との内積をとると

$$\begin{aligned}x&=x'(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}_1)+y'(\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}_1)+z'(\boldsymbol{e}'_3,\boldsymbol{e}_1)\\y&=x'(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}_2)+y'(\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}_2)+z'(\boldsymbol{e}'_3,\boldsymbol{e}_2)\\z&=x'(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}_3)+y'(\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}_3)+z'(\boldsymbol{e}'_3,\boldsymbol{e}_3)\end{aligned} \qquad (2\text{–}29)$$

2-6　剛体の回転の自由度

この章の初めに剛体の回転の自由度は3であることを述べた．詳しいことは第5章で議論するが，3という数は次のように導き出される．

剛体の重心を原点として一つの直交座標系を剛体に固定したままで設定する．その単位ベクトルを $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \bar{\boldsymbol{e}}_2, \bar{\boldsymbol{e}}_3$ とすると，空間に固定した直交座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を用いて

$$\bar{\boldsymbol{e}}_j=\sum_{i=1}^{3}(\bar{\boldsymbol{e}}_j, \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i \tag{2-30}$$

したがって剛体の回転状態は9個の数

$$a_{ji}=(\bar{\boldsymbol{e}}_j, \boldsymbol{e}_i) \tag{2-31}$$

により表わされる．しかしながら9個が全部独立なわけではなく，条件(2-12)を剛体固定系に適用してやると，次の6個の条件が出てくる．

$$\begin{aligned}(\bar{\boldsymbol{e}}_j, \bar{\boldsymbol{e}}_k)&=\sum_{i=1}^{3}(\bar{\boldsymbol{e}}_j, \boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_i, \bar{\boldsymbol{e}}_k)\\&=\sum_{i=1}^{3}a_{ji}a_{ki}\\&=\delta_{jk}\end{aligned} \tag{2-32}$$

したがって結局独立なのは $9-6=3$ となる．

2-7　速度と加速度

ベクトルについての上述の知識に基づいて速度と加速度との定義を与えよう．質点の座標を (2-1) のように時間の関数と考える．

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t), y(t), z(t)) \tag{2-33}$$

時刻が t から $t+\Delta t$ になると座標も $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ に変わる．したがって Δt という時間の間に，質点の位置の変化は

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

で与えられ，この間の平均速度は

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

で与えられ，瞬間的速度は $\Delta t \to 0$ なる極限で与えられる．

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right) \tag{2-34}$$

すなわち，ベクトルを微分するにはその成分を微分すればよい．ただしこれは直交系が空間に固定されているときにのみ正しい．t に関する微分は，微分される量の上の点で表わすことがある．たとえば速度 $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})=\dot{\boldsymbol{r}}$$

速度をもう一度時間について微分したものが加速度である．すなわち，加速度を $\boldsymbol{a}$ とすると

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\ddot{\boldsymbol{r}}$$

速度 $\boldsymbol{v}$ は明らかにベクトルである．この $\boldsymbol{v}$ の絶対値 v を速さという．速さはスカラーである．その間の関係は，

$$v^2=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}^2$$

速度と速さという言葉はまぎらわしいが，英語ではそれぞれ velocity，speed と全く違う語である．自動車の速度計と呼ばれるものは実は速度ではなくて速さを測るものであり，英語では speedometer と正しい名前で呼ばれている．それは速度計を見てもどの方向へ走っているかわからないから，ベクトルとしての速度は測れないからである．ところでスピード狂という名前は正しい．この名前で呼ばれる一群の人々は速さを競うものであり，どの方向へ行くかということには興味をもっていないからである．速度に質量を乗じた量 $\boldsymbol{p}$ を運動量と呼ぶ．

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=m\dot{\boldsymbol{r}} \tag{2-35}$$

古典力学では，運動量と速度とは密接に関係していてほとんど同義語であるが，量子力学のようにミクロの世界の話となると，両者は完全に異なったものになる．(2-35) の式は古典力学でのみ成り立つ式である．量子力学では，古典力学とは違って，運動量の方が速度よりもずっと基本的な量となる．

第 3 章

一質点の運動

いままでに力学の法則に関する基本的なことを学んだ．そこで最も簡単な問題として，一質点が外力の影響の下に運動する場合を考え，それを通して標準的な手法について学ぶことにする．この場合に，外力は一般に空間座標と場合によっては時間をも含む関数として与えられているとする．このような場合に運動方程式の一般形は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) \tag{3-1}$$

により与えられる．このとき大切なことは，初期条件

$$t=0 \quad \text{で} \quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0,\ \dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{v}_0 \tag{3-2}$$

が与えられたときに，できるだけ問題に適した座標系を選ぶことである．

3-1 地表における重力による質点の運動

まず $t=0$ における質点の位置が点 P にあるとしたときに，P から地表に

垂線を下ろし，地表での足を原点 O に選ぶ．そして $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向に y 軸を選ぶ．次に P から初速度 $\boldsymbol{v}_0$ の方向に線を引き，その地表への正射影を x 軸に選ぶ．そうすると $\overline{\mathrm{OP}}$ の長さを y_0 としたときに，点 P の座標は

$$\mathrm{P}(0, y_0, 0)$$

で与えられる．初速度 $\boldsymbol{v}_0$ は x 成分と y 成分としかもたないから

$$\boldsymbol{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, 0)$$

のように表わされる．このとき質点に働く重力は

$$\boldsymbol{F} = (0, -mg, 0) \tag{3-3}$$

で与えられる．この問題を解くに当たって大切なことは，この質点の運動は xy 平面内に限られていることである．すなわち，

$$z=0 \tag{3-4}$$

一般に，$t=0$ で $z=0$, $\dot{z}=0$ であるときに，その運動が xy 平面に限られるための十分条件は，x, y, t にかかわらず

$$F_z(x, y, 0, t) = 0 \tag{3-5}$$

で与えられる．なぜならば (3-4) は初期条件を満たすのみでなく，(3-5) により次の運動方程式も満たすからである．

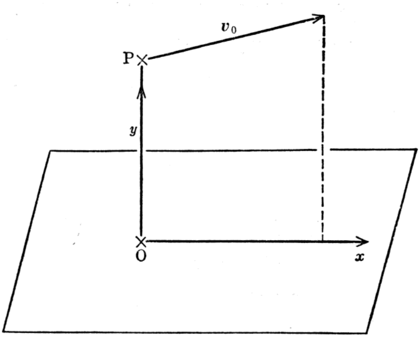


図 3-1　重力による質点の運動と座標系の選定
$t=0$ における質点の位置を点 P としたときに，P から地表へ垂線を下ろし，その足 O を原点に，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の方向に y 軸を選ぶ．更に初速度 v_0 の地表への正射影の方向に x 軸を選ぶ．そうするとこの質点の運動は xy 平面内に限定される．

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z(x, y, z, t) \tag{3-6}$$

重力の場合には明らかに (3-3) は (3-5) を満たしているからこの質点の運動は xy 平面内に限られることになる．したがって考えるべき方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg \tag{3-7}$$

x の方程式を t について積分すると

$$\frac{dx}{dt}=A_1 \tag{3-8}$$

ここに A_1 は任意の積分定数である．ところが $t=0$ でこの量は v_{0x} に等しくなければならないから $A_1=v_{0x}$ となり

$$\frac{dx}{dt}=v_{0x} \tag{3-9}$$

この式を t について積分すれば

$$x=v_{0x}t+A_2 \tag{3-10}$$

更に，$t=0$ で $x=0$ という初期条件から，$A_2=0$ となる．

$$x=v_{0x}t \tag{3-11}$$

この例から明らかなように，運動方程式を積分したときに生ずる積分定数は初期条件により一意的に決定される．y についても同様に t について 2 回積分する．上で 2 回にわけてやった手続きをまとめてやると

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+B_1t+B_2 \tag{3-12}$$

ただし B_1 と B_2 とは積分定数である．そこで初期条件

$$t=0 \quad \text{で} \quad y=y_0,\ \dot{y}=v_{0y} \tag{3-13}$$

を満たすように B_1 と B_2 とを定めると

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_{0y}t+y_0 \tag{3-14}$$

という運動方程式の解が得られる．ただしこの解は $y\geqq 0$ のときにのみ正しい．

次に問題となるのは質点の軌道である．これを求めるには (3-11) と (3-14)

とから t を消去すればよい．

$$y=-\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2+v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)+y_0 \tag{3-15}$$

が軌道の方程式である．これは放物線であり，放物線という名前の起源がこの軌道である．

上の例から学んだことは，与えられた初期条件の下に運動方程式の解は一意的に決定されるということで，これが古典力学，あるいはもっと一般的に古典物理学の特徴となる決定論の一例である．

この本では，長さの単位としてはメートル (m)，時間の単位は秒 (sec)，質量の単位はキログラム (kg) を選んで，いわゆる MKS 単位を採用することとする．したがって，たとえば力の単位はニュートンとなる．ただし $1\,\mathrm{N}=1\,\mathrm{kg\cdot m/sec^2}$.

3-2 調和振動子

質点に働く力がある点からの距離に比例し，方向はその点と質点とを結ぶ方向で，向きは質点からその点の方へ向いている場合に，このような力学系を調和振動子と呼ぶ．もしその点を原点に選べば，その質点に働く力は

$$\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r} \tag{3-16}$$

のごとく表わされる．$\boldsymbol{r}$ の絶対値が小さいときに，このような力は色々の原因で近似的に実現される．これは三次元の場合であるが，一次元でもバネの先に質点をつけて，その平衡の位置を x 軸上の原点に選べば，バネを伸縮したときに平衡の位置からのずれ x に比例した復原力が働き，その弾性力は

$$F_x=-kx \tag{3-17}$$

で与えられる．これが弾性力に関する Hooke の法則で，k を弾性定数と呼ぶ．

さて再び三次元の問題に戻る．(3-16) という力の下で質点が運動をするとしよう．まず初期条件を設定する．

$$t=0 \quad \text{で} \quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0,\ \dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{v}_0 \tag{3-18}$$

いま $\boldsymbol{r}_0$ の方向を x 軸に選び，x 軸とベクトル $\boldsymbol{v}_0$ とを含む平面を xy 平面に

選ぶことにしよう．そうするとこの座標系においては

$$\boldsymbol{r}_0=(x_0, 0, 0), \qquad \boldsymbol{v}_0=(v_{0x}, v_{0y}, 0) \tag{3-19}$$

のように初期値が与えられる．更に

$$F_z=-kz \tag{3-20}$$

は前例での条件（3-5）を満たすから，この質点の運動は再び xy 平面内に限定されることになり，この問題も二次元の問題に帰着させられる．運動方程式を成分にわけて書くと

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky \tag{3-21}$$

そこで

$$\omega^2=\frac{k}{m} \tag{3-22}$$

とおけば

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0 \tag{3-23}$$

我々はまず x の方を解くことにしよう．二つの初期条件により解が一意的に求められるためには，二つの積分定数を含む一般解を求め，その二つの積分定数を二つの初期条件により定めなければならない．まずこの方程式——微分方程式と呼ばれる——は線形である．すなわち，$x=f(t)$ と $x=g(t)$ とがいずれも（3-23）の解ならば

$$x=A_1f(t)+A_2g(t) \tag{3-24}$$

もやはり解である．ここに A_1，A_2 は任意定数であり，積分定数と呼ばれる．このような解に次のものがある．

$$f(t)=\sin\omega t, \qquad g(t)=\cos\omega t \tag{3-25}$$

実際微分してみると

$$f'(t)=\omega\cos\omega t, \qquad f''(t)=-\omega^2\sin\omega t$$

同様に

$$g'(t)=-\omega\sin\omega t, \qquad g''(t)=-\omega^2\cos\omega t$$

となるから，（3-25）はいずれも（3-23）の解となっており，一般解は（3-24）により与えられることになる．すなわち

$$x = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \tag{3-26}$$

そこで A_1, A_2 を決めるために初期条件を用いる.

$$t=0 \quad \text{で} \quad x = x_0, \ \dot{x} = v_{0x} \tag{3-27}$$

これから

$$A_2 = x_0, \qquad \omega A_1 = v_{0x} \tag{3-28}$$

したがって (3-26) の一般解で初期条件を満たすものは

$$x = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t \tag{3-29}$$

同様に

$$y = \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t \tag{3-30}$$

次に軌道方程式を書き下ろすためにまず $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ とを求めると

$$\sin \omega t = \frac{\omega}{v_{0y}} y, \qquad \cos \omega t = \frac{1}{x_0}\left(x - \frac{v_{0x}}{v_{0y}} y\right) \tag{3-31}$$

両者を自乗して加えると次の軌道方程式が得られる.

$$(\omega x_0)^2 \left(\frac{y}{v_{0y}}\right)^2 + v_{0x}^2 \left(\frac{x}{v_{0x}} - \frac{y}{v_{0y}}\right)^2 = x_0^2 \tag{3-32}$$

この軌道は明らかに楕円を表わしている. v_{0x} か v_{0y}, あるいは両方が 0 のときには (3-31) を使わずに (3-29), (3-30) に戻らなければならない. たとえば $v_{0x}=0$ ならば

$$\left(\frac{\omega x_0}{v_{0y}}\right)^2 y^2 + x^2 = x_0^2 \tag{3-33}$$

更にこの運動の特徴は周期性であり, (3-29), (3-30) の解において $\sin \omega t$ も $\cos \omega t$ も

$$t \to t + \frac{2\pi}{\omega} \tag{3-34}$$

というおき換えをすると

$$\sin \omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \sin \omega t, \qquad \cos \omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \cos \omega t$$

という関係があるので,

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{3-35}$$

はこの運動の周期となる．すなわち T 秒経つと，この質点は初めと同じ位置，速度に戻るのである．次に数学的にはこの例と全く同じになる問題を議論しよう．

3-3　球面振子と拘束力

原点から長さ l の糸を吊し，その糸の端に質量 m の質点をつける．この質点が糸の長さを変えることなしに重力の下で運動するという問題を考える．このときに質点に働く力は，重力 $\boldsymbol{F}$ と糸の張力 $\boldsymbol{T}$ とである．

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{T} \tag{3-36}$$

この場合には糸の長さが一定の l という拘束条件がある．

$$\boldsymbol{r}^2=x^2+y^2+z^2=l^2 \tag{3-37}$$

糸の張力 $\boldsymbol{T}$ はこの拘束条件が満たされるように選ばれなければならないので拘束力と呼ばれる．

重力は，鉛直上方を z 方向に選んだときに

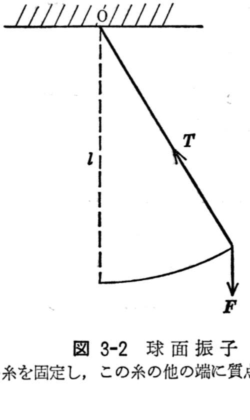


図 3-2　球面振子
原点Oに長さ l の糸を固定し，この糸の他の端に質点をつけたものが球面振子である．

$$\boldsymbol{F}=(0,0,-mg) \tag{3-38}$$

で与えられる．ところで張力 $\boldsymbol{T}$ は糸の方向に平行であり，その向きは $\boldsymbol{r}$ と反平行であるから

$$\boldsymbol{T}=-T\frac{\boldsymbol{r}}{l} \tag{3-39}$$

ただし $\boldsymbol{r}/l$ は糸の方向の単位ベクトルである．拘束条件を満たすためには，$\dot{\boldsymbol{r}}=d\boldsymbol{r}/dt$ が $\boldsymbol{T}$ と垂直でなければならない．

$$m(\dot{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{T})=0$$

この式を時間で微分して

$$(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{T},\boldsymbol{T})-\frac{m}{l}T\dot{\boldsymbol{r}}^2=0 \tag{3-40}$$

すなわち

$$T=-mg\frac{z}{l}-m\frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{l} \tag{3-41}$$

いま糸がたるまないように $z<0$ とし，質点が原点の真下の近傍で運動しているとして

$$\frac{x}{l},\ \frac{y}{l}\sim\text{微小量}\ \ \varepsilon\ll 1 \tag{3-42}$$

という近似をとり，ε について2次以上の微小量を省略すると

$$\begin{aligned} z&=-l\left(1-\frac{x^2+y^2}{2l^2}+\cdots\right)\\ &=-l+O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{3-43}$$

この近似では z は $-l$ に等しく一定である．また $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ はそれぞれ ε, ε, ε^2 の程度となるので (3-41) はこの近似で

$$T\approx mg \tag{3-44}$$

となり，また同じ近似で x と y との方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{x}+\omega^2x&=0,\\ \ddot{y}+\omega^2y&=0 \end{aligned} \tag{3-45}$$

となり，これは (3-23) 式と同形である．ただし

$$\omega^2=\frac{g}{l} \tag{3-46}$$

したがって球面の底を平面とみなせば，前例と同じく楕円軌道を書く．またこの球面振子の周期は

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3-47}$$

以上で議論したのは拘束力のある場合の問題である．またこの周期は振子の振幅が小さい（$x/l\ll 1$，$y/l\ll 1$）という近似の範囲で振幅によらず，Galilei の発見した振子の等時性を表わしている．通常の振子，たとえば時計の振子は一次元的であり，このような解は $y=0$ とおいて得られる．上の問題では糸を仮定したが，初めから球面があって質点が球面上にあり，球面の半径方向に $\boldsymbol{T}$ という拘束力を受けるとして問題を扱っても同じである．

3-4 摩　擦　力

質点がある面上で運動をしているとしよう．そのときこの質点は一般にこの面に垂直な方向に拘束力を受ける．このような拘束力を滑らかな拘束力と呼ぶ．しかしながら滑らかな拘束力とは，実は現実を理想化したものである．実際は，質点はこの面の中を動くために拘束力を受けるほかに摩擦により抵抗を受ける．両者を加えた拘束力 $\boldsymbol{T}$ は必ずしも面に垂直ではない．そこで $\boldsymbol{T}$ を面に垂直なベクトル $\boldsymbol{N}$ と，面内に含まれる成分 $\boldsymbol{R}$ とに分解する．

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{R} \tag{3-48}$$

$$(\boldsymbol{N},\boldsymbol{R})=0 \tag{3-49}$$

前の球面振子の例では，$\boldsymbol{N}$ のみを考え，$\boldsymbol{R}$ を 0 としたのである．いまこの質点に外力 $\boldsymbol{F}$ が作用したとすると，$\boldsymbol{F}$ も垂線方向の成分 $\boldsymbol{F}_\perp$ と面内の成分 $\boldsymbol{F}_{/\!/}$ とにわけられる．この質点を面内に止めるための拘束条件は

$$(\dot{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{N})=0$$

あるいは前例と同じく

$$(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{T},\boldsymbol{N})+\boldsymbol{m}(\dot{\boldsymbol{r}},\dot{\boldsymbol{N}})=0$$

となるが，以下では平面に限り第2項を落とす．

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_{\perp}+\boldsymbol{F}_{//} \tag{3-50}$$

このとき拘束条件は

$$\boldsymbol{F}_{\perp}+\boldsymbol{N}=0 \tag{3-51}$$

これにより拘束力の分力 $\boldsymbol{N}$ が定まる．さて摩擦力 $\boldsymbol{R}$ は質点の運動を妨げる方向に働くから，もし質点が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動していれば，$\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{v}$ と反平行となるから

$$\boldsymbol{R}=-R\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right) \tag{3-52}$$

ただし v は $\boldsymbol{v}$ の長さ，あるいは絶対値である．したがって拘束力 $\boldsymbol{T}$ は

$$\boldsymbol{T}=-\boldsymbol{F}_{\perp}-R\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right) \tag{3-53}$$

次に問題になるのは R の値であるが，経験法則として

$$R=\mu N \tag{3-54}$$

ただし N は $\boldsymbol{N}$ の絶対値であり，比例係数 μ を動摩擦係数と呼ぶ．ただし質点が静止していれば，長い時間をかけてゆっくりと面をへこませて変形し，その結果として質点を動かすに必要な外力は，図 3-3 から明らかなように

$$F_{//}\cos\alpha>F_{\perp}\sin\alpha$$

あるいは，次の条件が満たされていなければならない．

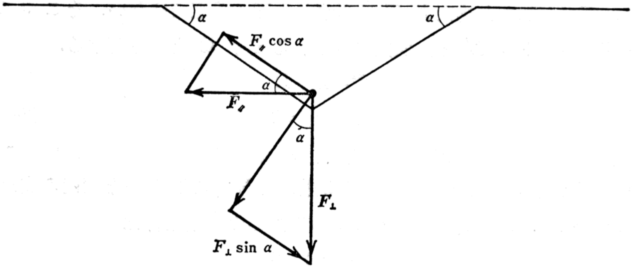


図 3-3　静摩擦の模型

質点が面上に静止していると，質点はゆっくりと面をへこませる．この質点に外力 $\boldsymbol{F}$ を加えたときに，質点を角度 α の斜面に沿って押し上げるためには，

$$F_{//}\cos\alpha>F_{\perp}\sin\alpha$$

が必要である．

$$F_{//} > N \tan\alpha = \mu_0 N$$

ただし

$$\mu_0 = \tan\alpha \tag{3-55}$$

は静摩擦係数と呼ばれ，一般に動摩擦係数より大きい．これは静摩擦の一つの直観的な模型である．

水平な xy 平面上での質点の運動方程式は，$\boldsymbol{r}=(x,y,0)$ としたときに摩擦力により

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -R\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right) \tag{3-56}$$

ただしこのほかに重力 $\boldsymbol{F}$ と拘束力 $\boldsymbol{N}=-\boldsymbol{F}$ が働いていると

$$R = \mu mg \tag{3-57}$$

ただし重力は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{F} = (0, 0, -mg) \tag{3-58}$$

(3-56) を書き直すと

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\mu g\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right) \tag{3-59}$$

これは時間について一階の微分方程式である．いま初速度の方向を x 軸に選ぶことにすると

$$\dot{v}_x = -\mu g\frac{v_x}{v}, \qquad \dot{v}_y = -\mu g\frac{v_y}{v} \tag{3-60}$$

初期条件は

$$t=0 \quad \text{で} \quad v_x = v_0 > 0, \ v_y = 0 \tag{3-61}$$

そこでこの場合にすべての時刻で

$$v_y = 0 \tag{3-62}$$

とすれば，v_y の方程式 (3-60) も初期条件 (3-61) も満たされることになる．したがって $v_x/v=1$ とおいてよいので v_x の式は v_x が符号を変えない限り

$$\dot{v}_x = -\mu g \tag{3-63}$$

符号が変われば v_x/v は -1 でおき換えねばならぬ．上式を積分して

$$v_x = v_0 - \mu g t \tag{3-64}$$

この解から，次の時間だけ経つと質点は止まってしまう．

$$t=\frac{v_0}{\mu g} \tag{3-65}$$

そこから先は，静摩擦により動けなくなってしまうので，実際に v_x が符号を変えることはない．したがって直線運動をするが，だんだん遅くなって最後に止まってしまう．この運動は後に述べる非可逆系の例になっている．

3-5 仕事とエネルギー

質量 m の質点を地表から高さ z の点まで持ち上げるとする．このとき質点には $\boldsymbol{F}=(0,0,-mg)$ という重力が働いているから，この質点を重力に逆らって地表の点 O から高さ z の点 P まで運ぶには，少なくとも $\boldsymbol{F}$ を打ち消す力 $\boldsymbol{F}_a$ を加えてやらなければならない．

$$\boldsymbol{F}_a=-\boldsymbol{F}$$

このときに $\boldsymbol{F}_a$ と $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ との内積を質点に加えられた仕事という．これを U と書けば

$$U=(\boldsymbol{F}_a,\boldsymbol{r}) \tag{3-66}$$

この場合に $\boldsymbol{F}_a$ は空間のすべての点で一様なので (3-66) のような式が書けるが，一般に $\boldsymbol{F}_a$ は点の座標によるわけである．また O から P へ行く径路も色々とある．そこで仕事の定義を次のように一般化する．

$$U=\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{F}_a,d\boldsymbol{r}) \tag{3-67}$$

この式は次のように定義される．O から P までの径路を一つのパラメター s で表現したとする．

$$x=x(s),\qquad y=y(s),\qquad z=z(s) \tag{3-68}$$

このとき x, y, z の関数である $\boldsymbol{F}_a$ もやはり s の関数となるから

$$(\boldsymbol{F}_a,d\boldsymbol{r})=\left(\boldsymbol{F}_a,\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)ds$$

この内積は s の関数であるから，O と P とに対応する s の値を s_0 と s とすると

$$\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{F}_a, d\boldsymbol{r})=\int_{s_0}^{s}\left(\boldsymbol{F}_a, \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)ds \tag{3-69}$$

さて重力の場合ならば，この積分はすぐに実行することができる．

$$\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{F}_a, d\boldsymbol{r})=mg\int_{0}^{z}dz=mgz \tag{3-70}$$

この結果は途中の道筋の選び方によらない．一般に質点を点 O から点 P まで動かすときに，質点に加えられた仕事が途中の径路の選び方によらないときに，力 $\boldsymbol{F}$ を保存力と呼ぶ．ここでは保存力のみを考えることにすると

$$U(\boldsymbol{r})=\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{F}_a, d\boldsymbol{r})=-\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) \tag{3-71}$$

は点 P の座標の関数となり，途中の径路にはよらない．そこでいま $U(x, y, z)$ に対して x をわずかだけ変化させると

$$U(x+\Delta x, y, z)-U(x, y, z)\cong -F_x\Delta x \tag{3-72}$$

いま両辺を Δx で除して $\Delta x\rightarrow 0$ なる極限をとると

$$\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{U(x+\Delta x, y, z)-U(x, y, z)}{\Delta x}=-F_x(x, y, z) \tag{3-73}$$

U は x, y, z の関数だが，左辺は y, z を固定したときの x に関する微分になる．このように多変数の関数に対して，他の変数を固定したときの微分を偏微分と呼び，左辺の極限値を

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \tag{3-74}$$

と記す．すなわち偏微分では d の代りに ∂ を用いるのである．すると保存力 $\boldsymbol{F}$ は，一つの関数 U を用いると同様に

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y=-\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z=-\frac{\partial U}{\partial z} \tag{3-75}$$

のように表現されることになる．関数 U は位置のエネルギー，あるいはポテンシャルエネルギーと呼ばれる．次に微分演算を表わすベクトル ∇（ナブラ）を導入する．

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{3-76}$$

すると

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U \tag{3-77}$$

位置のエネルギーに対して，

$$T = \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}^2 \tag{3-78}$$

を質点の運動のエネルギーと呼び，両者を力学的エネルギーと呼ぶ．すると

定理　保存力の下で質点が運動するときに，全力学的エネルギーは保存され，時刻によらない．

これが力学的エネルギーの保存則である．これを証明するには，運動方程式から出発する．

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

上の運動方程式に $\boldsymbol{v}$ を乗じて t について積分すると

$$m\int\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \boldsymbol{v}\right)dt = \int(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v})\,dt$$

$$= \int(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r})$$

右辺は径路を指定するパラメターとして s の代りに t を選んだものであるから，正に質点になされた仕事の符号を変えたものになる．保存力の場では $-U$ になる．他方

$$\int\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \boldsymbol{v}\right)dt = \int\left(\frac{dv_x}{dt}v_x + \frac{dv_y}{dt}v_y + \frac{dv_z}{dt}v_z\right)dt$$

$$= \int\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}v_y^2 + \frac{1}{2}v_z^2\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \text{積分定数}$$

したがってこの結果を前の式に代入すると

$$T = -U + E, \quad (E\ \text{は積分定数})$$

すなわち，

$$T + U = E \tag{3-79}$$

という力学的エネルギーの保存則が証明された.

いままで議論した例では摩擦力のある場合以外に質点に働く力はすべて保存力であり，位置のエネルギー U が存在する. 以下で個別に U を求めてみよう.

例 1 地表における重力

このときに重力は (3-38) で与えられ，Uは (3-70) で与えられることになる.

例 2 調和振動子

このときの力は $\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r}$ であるから

$$\frac{\partial U}{\partial x}=kx, \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=ky, \qquad \frac{\partial U}{\partial z}=kz$$

これらの方程式を同時に満たす U は次式で与えられる.

$$U=\frac{1}{2}k\boldsymbol{r}^2=\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2) \tag{3-80}$$

例 3 球面振子

このときには拘束力があるので多少複雑であるが，方程式 (3-36) に $\boldsymbol{v}$ を乗ずると

$$m\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},\boldsymbol{v}\right)=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{T},\boldsymbol{v}) \tag{3-81}$$

ところが $\boldsymbol{v}$ は球面内にあり，滑らかな拘束力 $\boldsymbol{T}$ は面に垂直であるから

$$(\boldsymbol{T},\boldsymbol{v})=0 \tag{3-82}$$

となり，拘束力は滑らかならば仕事をせず，保存則は拘束力のないときのものに帰着する. この場合に球の底面で小振動をしているという近似では，

$$U=\frac{mg}{2l}(x^2+y^2) \tag{3-83}$$

最後に摩擦力のある場合にどうなるかを調べる. まず方程式 (3-59) を用いると

$$\frac{d}{dt}T=m(\dot{\boldsymbol{v}},\boldsymbol{v})=-\mu g\frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}{v}=-\mu gv \tag{3-84}$$

この系では力学的エネルギーは減少し，その分だけ摩擦熱となる．

最後に力とエネルギーとの単位について述べておく．力の次元はその定義から LMT^{-2}，すなわち（長さ）×（質量）×（時間）$^{-2}$ である，したがって MKS 単位での力の単位は，$kg \cdot m \cdot sec^{-2}$ で与えられ，既に述べたようにこれを N（ニュートン）と呼ぶ．またエネルギーの次元は L^2MT^{-2} で，その単位は $kg \cdot m \cdot sec^{-2}$ であり，これを J（ジュール）と呼ぶ．

第 4 章

質点・剛体と量子論

4-1　マクロの世界とミクロの世界

古典力学を特徴づける性質が二つある．一つは古典物理学に特有な考え方として，すべての物理量は時間の連続関数として変化すると仮定していることである．すなわち，自然は飛躍せずという考え方である．またこの考え方と密接な関係にあるのが決定論である．すなわち，ある時刻で与えられた系についての初期条件が定まっていれば，それ以後のその系の運動は一意的に決定されてしまうという決定論である．もう一つの特徴は，古典力学の対象となる物体は人間的尺度のいわゆるマクロ（macroscopic）な物体であるが，その内部構造については問わないという態度である．またかつては，古典物理学の対象は，いわゆる物質の物理的性質に限るというかたくなな態度を維持していたので物理と化学という独立な2分野が存在しえたのである．ところが，原子・分子の世界にまで入ると，物理と化学との境はなくなってしまう．したがって古典物

理学の特徴として，与えられたマクロの物体の色々な物理定数は与えられたものとして扱い，その定数を微視的，あるいはミクロ（microscopic）な原子論から説明しようとはしない現象論であるということがいえる．実際に種々の物理定数を原子・分子の構造から導き出すという仕事は，古典物理学というよりも現代物理学の課題である．

さて古典力学の対象として質点とか剛体とかを考えたが，もっと現代的な立場で考えたときに我々は一体いかなる種類の理想化をしているのであろうか？まずいずれもマクロの物体であるから数多くの原子・分子から成り立ち，非常に多くの自由度をもっていることになる．それにもかかわらずこの系を自由度3の質点，あるいは自由度6の剛体として取り扱うためにはほとんどすべての自由度を無視しなければならない．実際問題としても Avogadro の数ほどもある自由度に対して一々方程式を書くわけにもゆかない．

それではここで無視された自由度は一体どうなってしまうのであろうか？一つの方法では，多くの自由度に対応する変数のある意味で平均的な量のみを残し，それによって力学変数としては無視された変数を代表させるのである．たとえば，気体の分子運動論では，

$$\left\langle \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}^2 \right\rangle = \frac{3}{2} kT \tag{4-1}$$

により，気体分子の運動のエネルギーの平均値を表わす量として，温度という集団の平均値に対応する新変数を導入するのである．ただし k は Boltzmann の定数と呼ばれ，温度をエネルギーに換算する定数である．

$$k = 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/degree} \tag{4-2}$$

またこのほかにも密度とか圧力のように集団の平均値を表わす変数もあるが，その他の膨大な数の変数は完全に無視されることになる．このように集団的平均値を表わす変数のみをいくつか残して他の変数は無視するから，これらの集団変数で指定される状態というのは，実は非常に幅が広くて無数の異なる状態が現われたり消えたりしているものと考えられる．数個の集団変数で区別できない多くの状態がいかなる頻度で現われるかは統計力学によって与えられる．これらの無数の状態があっても力学では区別されないわけである．ところですべての自由度を力学的に扱ったとしたら，全系の力学的エネルギーは保存され

るであろう．しかしながら上述のように，力学的エネルギーとして認められるのは，少数の自由度に対応するものだけであり，エネルギーの他の部分は他の集団変数に対応する．たとえば分子の平均運動エネルギーが増せば，(4-1) によりこれは温度の上昇に対応し，この分のエネルギーは熱エネルギーと呼ばれる．またバネのような弾性体は剛体と違ってある種の変形が認められ，その変形の様子も一種の集団変数，たとえば密度で表わされ，このような自由度に与えられた位置エネルギーは弾性エネルギーと呼ばれる．

我々はエネルギー保存則を力学的に把握したが，古典物理学の体系の中で理解するためには，エネルギーには色々な形態があること，お互いに移り変われること，そしてその際には異なる形態のエネルギーは異なる単位で表わされるがその間には一定の換算率があり，一つの単位に換算された全エネルギーは一定であるという意味で受け取らなければならない．これはある人の財産が，円，ドル，マルク等になっていても円に換算すればいくらいくらというように考えたときに，エネルギーの総和がいつでも一定であることを意味する．ただしお金の場合には換算率が毎日変わるし，財産の総和が毎日一定でなくてはならない理由もないが．

上述の意味でのエネルギー保存則は Mayer とか Helmholtz により提唱された．力学の範囲からはみ出したエネルギーの形態を調べる問題は熱力学という分野を生んだ．この方面で有名な例は，Joule による熱の仕事当量の測定である．15°C で 1 グラムの水の温度を 1°C 上昇させるのに必要な熱量を 1 cal (カロリー) と呼ぶが，彼は力学的エネルギーを熱に変える実験から

$$1\,\mathrm{cal}=4.18\,\mathrm{J} \tag{4-3}$$

という熱量を力学的エネルギーに換算する率を決定した．

以上では力学変数以外の変数の取扱い方に関する一方法を述べたが，もっとほかにも異なった考え方もできる．すなわち，全体の並進運動と回転運動以外の自由度を凍結してしまえないかという考え方である．すなわち上述以外の自由度を表わす変数を固定して変化させなくするのである．問題は一体こんなことが可能であろうかということである．答は，Yes であるが，古典物理学の範囲内では No である．凍結という言葉が暗示しているように，このようなことは低温でなければ可能ではない．あるいは全系のエネルギーの総和ができる

だけ小さくなければならない．

古典物理学の枠内で答が No になるということの意味は，古典物理学の基本的な仮定，“すべての物理量は連続的に変化する”を否定しなければならないからである．古典物理学を水素原子の模型，すなわち電子が陽子の周りを回っているという模型に適用しようとするとその安定性が説明できない．電子と陽子との間には逆自乗法則に従う Coulomb の引力が働く．すなわち，引力の強さは距離の自乗に反比例する．この場合にずっと重い陽子を固定して電子のみが動くとすれば，その運動は太陽の周りを惑星が回るときと同じく Kepler の法則に従う．すなわち，電子は陽子を焦点とする楕円軌道上を走る．ところが楕円運動は等速運動ではないので，荷電粒子である電子は古典電磁気の法則に従って電磁波を放出する．この結果電子は力学的エネルギーを失い，その軌道半径はどんどん縮まってゆく．しかもこのとき発しうる電磁的エネルギーは無限であり，水素原子はいわば奈落の底へ落ちてゆくような状態にあり，水素原子が安定に存在しえないことを意味する．この困難を解決するために Niels Bohr は有名な原子論を提唱した (1913)．古典論では電子と陽子とからなる系の全エネルギーは連続的に任意の値をとる．そしてそのエネルギーの値には下限がないために水素原子は安定に存在しえないのである．陽子の運動を無視すると水素原子の力学的エネルギーは

$$E=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2-\frac{e^2}{r}$$

で与えられる．第1項が電子の運動エネルギー，第2項が Coulomb 力に対応する位置エネルギーで，e は陽子あるいは電子の電荷の絶対値である．古典力学では，電子の軌道は E の符号で分類される．

$E>0$, 双曲線軌道

$E=0$, 放物線軌道

$E<0$, 楕円軌道

Bohr の原子論によれば，$E<0$ のいわゆる束縛状態ではこの系のエネルギー E のとりうる値は連続でなく，離散的になるという．E のとりうる値をエネルギー準位と呼ぶ．しかも E には最小値があり，それに対応する状態 E_1 を基底状態，その上の状態 $E_2, E_3, \cdots$ を励起状態と呼ぶ．このように楕円軌道に

相当する $E<0$ の状態は，古典論のように連続的でなくて離散的である．しかしながら双曲線軌道に相当する $E>0$ の状態は，古典論と同じく連続的である．励起状態にある電子は光を放出して基底状態に落ちることができる．逆に基底状態に光を当てたりしてエネルギーを与えれば，電子は励起状態に上がることができる．しかしながら基底状態にある電子にいくら外からエネルギーを与えても，そのエネルギーが (E_2-E_1) よりも小さければ内部状態は変わりようがない．このぎりぎりのエネルギー (E_2-E_1) を閾(しきい)値と呼ぶ．外から与えられるエネルギーが閾値以下ならば，この内部励起の自由度は凍結されているということができる．ところが自由度の中にはどうしても凍結できないものがある．たとえば自由空間における並進運動の自由度がそうである．このエネルギーは常に正で連続スペクトルに属し，したがって閾値は0となるのでどんなにわずかなエネルギーでもこの自由度を励起しうるからである．それに反して前の例では，外から閾値を超えるようなエネルギーが与えられない限り内部自由度が凍結されていると考えることができる．すなわち，閾値以下のエネルギーの刺激に対しては，このような系は剛体のように振る舞う．したがって閾値が大きいほどその系は固いということができる．このように，ある自由度が剛体のように閾値以下のエネルギーしか与えない外力に対して凍結されるというようなことは古典論では不可能で，量子論あるいは量子力学においては

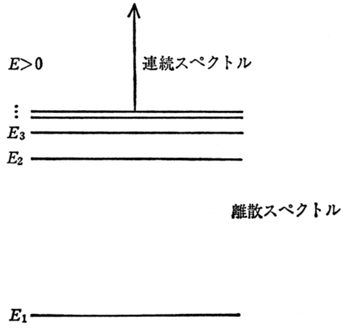


図 4-1　水素原子のエネルギー準位
Bohr の原子論によれば，$E>0$ なるエネルギー準位は連続スペクトルに属し，$E<0$ なるエネルギー準位は離散スペクトルに属する．

じめて可能になる．そこで以下では簡単に量子論発見の経緯について述べる．

4-2　量子論の誕生

物質の原子構造は，古典物理学によるとその安定性の説明という難問をかかえている．このようにミクロの世界を支配している法則は古典物理学ではありえない．そこで誕生したのが量子論，後に量子力学である．ところでこのような深遠な発見がなされたのは意外にも現実的な問題が発端であった．

19世紀末のプロシャは典型的な軍国主義帝国で，大砲やその他の武器を作るための鉄工業が盛んであった．そこで生じた問題の一つが熔鉱炉の温度をいかにして測定するかということであった．そのために炉から漏れる光のスペクトルが温度とともにどのように変わるかが問題となったのである．これを空洞輻射の問題という．ところが古典物理学は原子の安定性を説明できないだけでなくて，この問題でもボロを出したのである．すなわち，空洞の中で振動している電磁波に対して統計力学を適用してみると，古典物理学を用いる限りどうしても比熱が無限大になってしまうのである．Planck はこの現象を説明するために，古典物理学とは相容れないいわゆる量子仮説を提唱した (1900)．すなわち，“振動数 ν で振動する系が光を吸収したり放出したりするときに，この系のエネルギーの増減は常に $h\nu$ の整数倍である”．ここに h は Planck の定数と呼ばれ，作用という次元をもつ．$[h]=\mathrm{L^2MT^{-1}}$，そして

$$h=6.625\times10^{-34}\ \mathrm{J\ sec} \tag{4-4}$$

この仮説の意義は，明らかにマクロの世界を支配する古典物理学の領域外に飛び出しているということにある．古典物理学の世界ではすべての物理量の変化は連続的であったが，ここに初めて不連続的変化を許すという量子仮説が生まれたのである．

次いで Einstein は光量子仮説を提唱して Planck 仮説を更に一歩前進させた (1905)．光の干渉・回折等は光の波動論によって見事に説明される．ところで光を波動と考えた場合には，Planck の考えたように振動から放出吸収されるエネルギーが常に一定の単位をもっていることの説明ができない．そこで Einstein は，$h\nu$ というエネルギー量子は，与えられた力学系のエネルギー準

位の不連続性によるよりも，むしろ光は多くの粒子の集合であり，一つ一つの粒子が $h\nu$ というエネルギーをもっていると考え，その粒子を光量子，あるいは光子と名づけた．

またこの粒子は当然光速度で進む．波動説とは相容れないように見えるが，この仮説により説明される現象が数多ある．たとえば，光電効果がそのよい例で，この現象が光量子仮説の発端となったものである．アルカリ金属の表面に波長の短い光を当てると電子が飛び出す．この電子のエネルギーは光の強度によらない．しかし飛び出す電子の数は強度に比例する．また電子のエネルギーは光の振動数にのみよる．光の振動数を ν，電子のエネルギーを E とすると

$$E=h\nu-W \tag{4-5}$$

ここに W は金属の種類によって定まるエネルギーである．

W は前述の水素原子の例でいえば，基底状態にある電子を双曲線軌道に移すために必要なエネルギー，すなわち $-E_1$ と同じ性質のエネルギーで閾値の一種である．強度は光子の数に比例するから，飛び出す電子の数は強度に比例するが，一つ一つの電子のエネルギーは (4-5) 式で与えられることになる．また電子は光が当たった瞬間に飛び出すが，これも波動論では説明がつかない．波動論では電子は電磁波から少しずつエネルギーを貰って蓄え，秒の程度の時間の後に飛び出すと思われる．またずっと後のことであるが，光が電子に散乱されると波長が長くなるという Compton 効果が発見された．この波長の変化は，光量子を粒子と考え，光量子と電子との弾性散乱に対してエネルギーと運動量の保存則を仮定すると説明できる．前述の Bohr の原子論でも，E_m という準位から E_n という準位に光を出して落ちるときに放出されるエネルギーは光量子に与えられ，したがってその振動数 ν は

$$E_m-E_n=h\nu \tag{4-6}$$

によって決定されることになる．このようにミクロの世界では，光は波動性と粒子性とを併せもつことがわかった．それと同じにミクロの世界を特徴づけるものは不連続性であるといえるであろう．

4-3　ミクロの世界でのエネルギーの単位

既に述べたようにミクロの世界では基底状態にある系の内部自由度が励起されるためには，ある閾値を超えるエネルギーが供給されなければならない．したがってこの閾値が大きいほど固くなり，剛体に近くなるはずである．実際には小さいものほど固くなり，古典力学の適用範囲外になってしまうので，古典力学に従い，かつ本当に固いものを見つけるのは難しいことになる．

そこで次に原子・分子の相互衝突による化学反応と原子核同士の衝突による核反応について，関与するエネルギーを比べてみよう．そのためにまずミクロの世界で用いるのに便利なエネルギーの単位を導入する．電子が1ボルトの電位差で加速されたときに電子が得る運動のエネルギーを1電子ボルトと呼び，eV (electron volt) と記す．また eV の上の単位として kilo (10^3)，mega (10^6)，giga (10^9) を用いて

$$1\,\mathrm{keV}=10^3\,\mathrm{eV},\qquad 1\,\mathrm{MeV}=10^6\,\mathrm{eV},\qquad 1\,\mathrm{GeV}=10^9\,\mathrm{eV}$$

などもよく用いられる．また eV を MKS 単位で表わすと

$$1\,\mathrm{eV}=1.60\times10^{-9}\,\mathrm{C}\times1\,\mathrm{V}=1.60\times10^{-19}\,\mathrm{J} \qquad (4\text{-}7)$$

さて化学反応は分子同士の衝突で原子の組合せが変わる反応であり，発熱反応と吸熱反応とがある．可逆反応ではいずれか一方が発熱で，他方が吸熱となる．この分子レベルの反応で生ずるエネルギーはどの程度であろうか．

2モルの水素分子と1モルの酸素分子を化合させると

$$2\mathrm{H_2}+\mathrm{O_2}\longrightarrow 2\mathrm{H_2O}+4.9\times10^5\,\mathrm{J}$$

これを Avogadro の数 6.02×10^{23} で除し，eV で表わすと，2個の水素分子と1個の酸素分子が衝突して水の分子が出来るときに生ずるエネルギーは

$$2\mathrm{H_2}+\mathrm{O_2}\longrightarrow 2\mathrm{H_2O}+5.0\,\mathrm{eV} \qquad (4\text{-}8)$$

すなわち，化学反応の記述には eV というのは便利な単位である．また逆反応を考えると，5.0 eV は水の分子を分解するための閾値になり，水の固さを表わす．上のように解放されたエネルギーは分子の運動エネルギーとして使われる．またエネルギーと運動量の保存則から光子という形でエネルギーを放出することもある．逆に吸熱反応のときに衝突する分子は十分な運動のエネルギー

をもつことが必要である．そのためには温度を高くすることが必要であり，(4-2) 式のジュールと温度の間の換算式を，eV と温度との間の換算式に直すと

$$k=0.86\times10^{-4}\ \mathrm{eV/degree} \tag{4-9}$$

これから 1eV が約1万度に相当することになる．

さて吸熱反応で，ある温度での平均的運動のエネルギーが閾値より低くてもその反応が起きないわけではない．平均値は低くても中には十分高いエネルギーをもった分子もあるからである．しかし温度が高いほどこのような分子数が増えて反応も起き易い．一般に化学反応に必要なエネルギーは eV の程度で，化学反応でなくても次の光電効果では約 13eV のエネルギーの光子が必要である．

$$\text{光子} + \text{水素原子} \longrightarrow \text{陽子} + \text{電子} \tag{4-10}$$

原子番号が Z であるような原子は Z 個の電子と，Ze という電荷をもつ重い原子核よりなる．ただし e は1個の陽子のもつ電荷である．分子はこのような原子が何個か集まり，全体として電子配置が変わることによりお互いに結合する．化学反応では分子を形成している原子の組合せが変わるだけで原子自身の数は変わらない．この際に，原子核の性質としては，重くて正電荷 Ze をもつということのみが重要である．化学反応ではそれ以上の性質は関与しないのである．さて原子の大きさ，すなわち電子の軌道半径は 10^{-10} m の程度であることが知られているが，その中心となる原子核の大きさはどのくらいであろうか？　原子の質量の大部分を受け持っている原子核は原子の大きさくらいに拡がっていると思われていたが，Rutherford によってずっと小さいことがわかった．彼は放射性原子核から飛び出してくる α 粒子を原子核にぶつけてどのように散乱されるかを調べた．第9章で詳しい計算が示されるが，α 粒子は軽い電子を跳ね飛ばして原子核との Coulomb 力により散乱される．この散乱による α の角分布は原子核内の電荷分布を反映する．それによると原子核の半径はわずか 10^{-14} m ～ 10^{-15} m の程度である．すなわち，原子は電子がほとんど点状の原子核の周りを回って出来ていることになる．それでは原子核は何から出来ているであろうか？　それは陽子と中性子とからなる．中性子は陽子とほとんど同じ質量をもつが，電気的に中性で Chadwick により発見された (1932).

この粒子は次のごとき反応から出てくる．

$$\alpha + \mathrm{Be}^{9} \longrightarrow \mathrm{C}^{12} + \mathrm{n} \tag{4-11}$$

右肩の数は陽子と中性子とを合わせた数を表わす．

さて水素原子中の電子・陽子間の Coulomb 引力と，原子核内の陽子同士の Coulomb 斥力を比べると距離にして 10^5 倍の違いがあり，陽子間斥力の大きさは，電子・陽子間の引力の 10^{10} 倍くらいになる．それではなぜ陽子同士は反撥しないで原子核内に止まっているのであろうか？ 万有引力はわずか 10^{-36} 倍くらいになってしまうので問題にならない．陽子間の引力は新しく非常に強い力で説明されなければならない．これを核力と呼び，10^{-15} m 程度の非常に近い距離でしか働かない．この核力を説明するために，中間子に関する湯川理論が生まれたのである．

中性子の発見のときに用いた原子核反応と同様に $\alpha(\mathrm{He}^4)$ を色々な原子核にぶつけて反応を起こさせてみる．このような反応は化学反応と違って陽子・中性子の組合せが変わるので核反応と呼ばれる．化学反応と同様に吸熱および発熱両種の反応がある．たとえば

$$\begin{aligned}
\alpha + \mathrm{N}^{14} &\longrightarrow \mathrm{O}^{17} + \mathrm{p} - 1.3\,\mathrm{MeV} \\
\alpha + \mathrm{Al}^{27} &\longrightarrow \mathrm{Si}^{30} + \mathrm{p} + 2.3\,\mathrm{MeV} \\
\alpha + \mathrm{B}^{10} &\longrightarrow \mathrm{C}^{13} + \mathrm{p} + 4.6\,\mathrm{MeV}
\end{aligned}$$

現在ではぶつける粒子は加速器を用いて加速される．核反応の閾値は，上の例からわかるように MeV の程度で，化学反応のときより6桁も大きい．このことは原子爆弾（正しくは原子核爆弾）が従来の化学反応を用いる爆薬よりどのくらい強力であるかを示す材料となる．

核反応の生起は，元素は絶対不変なものであるという迷信を覆えし，ある意味で錬金術が可能であることを示したともいえる．

さてこの章の主題に戻ると，原子核は原子・分子よりもずっと固くて，剛体と呼ばれるのにふさわしいように思われる．残念ながら小さすぎて古典力学の対象にはなりえない．マクロの結晶でも低温では似たような現象，すなわち自由度の凍結現象を示す．Mössbauer 効果はそれを利用した例である．

第 5 章

質点系および剛体の運動と保存則

5-1　質点系における運動量保存則

いままで第3章では，外力の下での質点の運動を調べたが，今度は外力のない慣性系へ戻ろう．その代り質点は複数個あり，外力はないが質点間の力，いわば内力が存在する場合を考える．

まず運動方程式 (1-9) 式より出発する．j 番目の粒子は

$$m_j \frac{d^2 \boldsymbol{r}_j}{dt^2} = \sum_{i \neq j} \boldsymbol{F}(i \to j) \tag{5-1}$$

なる方程式に従う．この式を j について加えると

$$\sum_j m_j \frac{d^2 \boldsymbol{r}_j}{dt^2} = \sum_{i > j} (\boldsymbol{F}(i \to j) + \boldsymbol{F}(j \to i)) = 0 \tag{5-2}$$

ただしここで Newton の第三法則 (1-10) を用いた．次に (2-35) 式によって運動量を導入しよう．しからば (5-2) 式は次のように表現される．

$$\frac{d}{dt}\sum_j m_j\dot{\boldsymbol{r}}_j=\frac{d}{dt}\sum_j \boldsymbol{p}_j=0 \tag{5-3}$$

ただし $\boldsymbol{p}_j$ は j 番目の質点の運動量で次式で定義される．

$$\boldsymbol{p}_j=m_j\dot{\boldsymbol{r}}_j \tag{5-4}$$

ゆえに系の全運動量 $\boldsymbol{P}$ は保存されることになる．ただし

$$\boldsymbol{P}=\sum_j \boldsymbol{p}_j \tag{5-5}$$

いま重心の座標を $\boldsymbol{R}$ とすると

$$\boldsymbol{R}=\sum_j m_j\boldsymbol{r}_j/\sum_j m_j \tag{5-6}$$

そうすると

$$\boldsymbol{P}=M\dot{\boldsymbol{R}},\qquad M=\sum_j m_j \tag{5-7}$$

したがって $\boldsymbol{P}$ が保存されるということは重心が等速直線運動をすることを意味する．これは慣性系の特徴である．

5-2　作用反作用の法則のポテンシャルによる表現

いま質点系の内力は保存力であり，したがってポテンシャルにより表現されるとする．このときに作用反作用の法則は，ポテンシャルを用いてどのように表現されるかを考えてみる．保存力ということから，質点1と質点2との間の力を出すためのポテンシャル U が存在して

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{F}(2\to1)&=-\left(\frac{\partial U}{\partial x_1},\frac{\partial U}{\partial y_1},\frac{\partial U}{\partial z_1}\right)\\ \boldsymbol{F}(1\to2)&=-\left(\frac{\partial U}{\partial x_2},\frac{\partial U}{\partial y_2},\frac{\partial U}{\partial z_2}\right)\end{aligned}\right. \tag{5-8}$$

ただし U は $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ との関数である．

$$U=U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \tag{5-9}$$

そこで作用反作用の法則を (5-8) 式により表現すると

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}+\frac{\partial U}{\partial x_2}=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial y_1}+\frac{\partial U}{\partial y_2}=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial z_1}+\frac{\partial U}{\partial z_2}=0 \tag{5-10}$$

これはいわば U の構造を決めるための偏微分方程式であり，以下ではこの方

程式の解を求めよう.

まず偏微分の公式として，合成関数の偏微分について述べよう．F が，u_1, $u_2, \cdots, u_n$ の関数であり，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ が x およびその他の変数の関数であれば

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_j}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x} \tag{5-11}$$

そこでUが x_1, x_2 にいかに依存するかを決定しよう．y, z については後で考えることにする．(5–10) を解くために，U は x_1, x_2 の関数であるが，それを u, v の関数であると考えよう．

$$U=U(u, v) \tag{5-12}$$

ただし，u と v とは次式で定義される．

$$u=x_1+x_2, \qquad v=x_1-x_2 \tag{5-13}$$

このとき

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x_1}&=\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_1}\\&=\frac{\partial U}{\partial u}+\frac{\partial U}{\partial v}\\\frac{\partial U}{\partial x_2}&=\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_2}\\&=\frac{\partial U}{\partial u}-\frac{\partial U}{\partial v}\end{aligned} \tag{5-14}$$

したがって (5–10) の第 1 式を書き直すと

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}+\frac{\partial U}{\partial x_2}=2\frac{\partial U}{\partial u}=0 \tag{5-15}$$

さて U はu と v との関数であると仮定したが，結果的には u にはよらずに v のみの関数となる．すなわち，

$$U=U(x_1-x_2) \tag{5-16}$$

y, z についても同様なことを繰り返せば結局 U は

$$U=U(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2) \tag{5-17}$$

というように座標の差のみに依存する．このことが，作用反作用の法則のポテンシャルによる表現になる．多くの場合に U は 2 点間の距離 $r_{12}=|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|$ の

みによると考えられ，$U=U(r_{12})$ となる．以下では我々もこの仮定を受け入れることにする．

5-3　エネルギー保存則

方程式 (5-1) に $\boldsymbol{v}_i$ を乗じる．ただし (5-1) の j を i に変えておいたとする．そうすると

$$m_i\left(\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}, \boldsymbol{v}_i\right)=\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}(j\to i)\boldsymbol{v}_i$$

この式を i について加えると，左辺は

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i^2\right)$$

同様に右辺は

$$\begin{aligned}
&\sum_i\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}(j\to i)\boldsymbol{v}_i\\
&=\sum_{i<j}\boldsymbol{F}(j\to i)(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j)\\
&=-\sum_{i<j}\left[\frac{\partial U(r_{ij})}{\partial x_{ij}}(\dot{x}_i-\dot{x}_j)+\frac{\partial U(r_{ij})}{\partial y_{ij}}(\dot{y}_i-\dot{y}_j)+\frac{\partial U(r_{ij})}{\partial z_{ij}}(\dot{z}_i-\dot{z}_j)\right]\\
&=-\frac{d}{dt}\sum_{i<j}U(r_{ij})
\end{aligned}$$

ただし $x_{ij}=x_i-x_j, \cdots$ を用いた．ゆえに再び質点系に対するエネルギー保存則を得る．

$$\frac{d}{dt}(T+U)=0 \tag{5-18}$$

ただし T は全運動エネルギー，U は全ポテンシャルエネルギーを表わしている．すなわち，

$$T=\sum_i\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i^2 \tag{5-19}$$

$$U=\sum_{i<j}U(r_{ij}) \tag{5-20}$$

(5-18) 式を積分すると，E を積分定数として

$$T+U=E \tag{5-21}$$

5-4　角運動量保存則

運動量保存則は U が座標の差のみの関数ならば成り立つ．ところが角運動量保存則は更に U が質点間の距離のみの関数であることを必要とする．

空間に固定点 O を選び，質点のある点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\boldsymbol{r}$ としたときに，この質点の角運動量は

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$$

で定義され，質点系の全角運動量は次式で定義される．

$$\boldsymbol{L}=\sum_j \boldsymbol{l}_j=\sum \boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{p}_j \tag{5-22}$$

さて先ほど U は距離のみの関数であると仮定したが，このような力を中心力と呼ぶ．中心力の重要な性質の一つは

$$\boldsymbol{F}(i\to j)/\!/\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j$$

という平行性である．ベクトル積を使えばこの条件は

$$(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}(i\to j)=0 \tag{5-23}$$

以下においてこのことを証明する．U は r_{ij} の関数であるから r_{ij}^2 の関数としてもよい．

$$U(r_{ij})=f(r_{ij}^2)=f[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2]$$

これから

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(i\to j)&=-\nabla_j U(r_{ij}),\quad \text{ただし}\quad \nabla_j=\left(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial y_j},\frac{\partial}{\partial z_j}\right)^{\dagger}\\&=-\nabla_j r_{ij}^2\cdot f'(r_{ij}^2)\\&=2(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)f'(r_{ij}^2)/\!/(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\end{aligned} \tag{5-24}$$

したがって (5-23) が成り立つ．このような場合には質点系の全角運動量が保存されることが次のごとく証明される．

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\sum_j\frac{d\boldsymbol{l}_j}{dt} \tag{5-25}$$

† (3-76) を参照．

ところで

$$\frac{d\boldsymbol{l}_j}{dt}=\dot{\boldsymbol{r}}_j\times\boldsymbol{p}_j+\boldsymbol{r}_j\times\dot{\boldsymbol{p}}_j$$
$$=m_j(\dot{\boldsymbol{r}}_j\times\dot{\boldsymbol{r}}_j)+\boldsymbol{r}_j\times\sum_{i\neq j}\boldsymbol{F}(i\to j)$$
$$=\sum_{i\neq j}\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}(i\to j)$$

ゆえに

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\sum_j\sum_{i\neq j}\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}(i\to j) \tag{5-26}$$

さてこの右辺には i, j という対を含む項は2項あり，

$$\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}(i\to j)+\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}(j\to i)$$
$$=(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}(j\to i)=0 \tag{5-27}$$

すなわち，それぞれの対についての和が0となる．ゆえに

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=0 \tag{5-28}$$

上の計算では内力しか考えなかったが，外力があれば，$\boldsymbol{F}_j$ を j 番目の質点に働く外力としたときに

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\sum_j\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_j=\boldsymbol{N} \tag{5-29}$$

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\sum_j\boldsymbol{F}_j=\boldsymbol{F} \tag{5-30}$$

となり保存則が成り立たなくなる．$\boldsymbol{N}$ を力のモーメントと呼ぶ．

質点系において，すべての質点間の距離 r_{ij} を一定に保つという拘束条件を課されたものが剛体である．剛体に対しては質点系一般に対して成り立つことは全部成り立つ．剛体は質点系の特別な場合だからである．

5-5　重心運動の分離と剛体の回転

位置ベクトルを重心の位置ベクトルと重心からの位置ベクトルとに分離する．

$$\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_j \tag{5-31}$$

定義から明らかに

$$\sum_j m_j \boldsymbol{r}'_j = 0, \qquad \sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}'_j = 0 \tag{5-32}$$

次に運動エネルギーは重心の運動エネルギーと相対運動のエネルギーとの和に分解される．

$$\begin{aligned} T &= \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_j m_j\right)\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \left(\sum m_j \dot{\boldsymbol{r}}'_j\right)\dot{\boldsymbol{R}} + \frac{1}{2}\sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}'^2_j \\ &= \frac{1}{2} M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}'^2_j \end{aligned} \tag{5-33}$$

また運動量については

$$\begin{aligned} \sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j &= \left(\sum_j m_j\right)\dot{\boldsymbol{R}} + \sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}'_j \\ &= M\dot{\boldsymbol{R}} \end{aligned} \tag{5-34}$$

のように，重心に全質量を集めた場合の質点の運動量と等しくなる．角運動量についても同様に

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \sum_j m_j (\boldsymbol{r}_j \times \dot{\boldsymbol{r}}_j) \\ &= \left(\sum_j m_j\right)\boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{R}} + \sum_j m_j (\boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{r}}'_j + \boldsymbol{r}'_j \times \dot{\boldsymbol{R}}) + \sum m_j (\boldsymbol{r}'_j \times \dot{\boldsymbol{r}}'_j) \end{aligned}$$

この第 2 項は (5-32) により消えるから

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= M(\boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{R}}) + \sum_j m_j (\boldsymbol{r}'_j \times \dot{\boldsymbol{r}}'_j) \\ &= \boldsymbol{L}_0 + \boldsymbol{L}' \end{aligned} \tag{5-35}$$

すなわち，全角運動量は，ある点の周りの重心の角運動量と重心の周りの質点系の角運動量とに分解される．同様に力のモーメントも次のごとく分解される．

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{F} + \sum_j \boldsymbol{r}'_j \times \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{N}_0 + \boldsymbol{N}' \tag{5-36}$$

その結果 (5-29) より

$$\frac{d\boldsymbol{L}_0}{dt} = \boldsymbol{R} \times M\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}_0 \tag{5-37}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt}=\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}-\frac{d\boldsymbol{L}_0}{dt}=\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N}_0=\boldsymbol{N}' \tag{5-38}$$

このように重心の運動と相対運動とは完全に分離される．

以上は質点系一般について述べたものであるが，剛体の場合には，重心を固定した運動というのは重心の周りの回転運動になる．したがって (5-33) の第2項は重心の周りの回転に対する運動のエネルギーを表わしている．

重心の周りの回転を支配する方程式は (5-38) である．

$$\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt}=\sum_j \boldsymbol{r}_j'\times\boldsymbol{F}_j \tag{5-39}$$

そこでこの式を剛体に固定した座標系を用いて表現する．

剛体に重心を原点とする一つの座標系を選び，その三つの単位ベクトルを

$$\overline{\boldsymbol{e}}_1,\ \overline{\boldsymbol{e}}_2,\ \overline{\boldsymbol{e}}_3 \tag{5-40}$$

とする．これは第2章で導入されたものと同じである．この座標系は剛体に固定されているので，三つの単位ベクトル (5-40) が時間の関数として与えられれば剛体の回転運動は完全に決定される．剛体が多くの質点からなるとすると j 番目の質点の重心からの位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r}_j'=x_j\overline{\boldsymbol{e}}_1+y_j\overline{\boldsymbol{e}}_2+z_j\overline{\boldsymbol{e}}_3 \tag{5-41}$$

のように，剛体に固定した座標系に関する座標 x_j, y_j, z_j が与えられ，剛体が変形しなければこれらの座標は時間によらず，$\overline{\boldsymbol{e}}$ の方が時間の関数となるのである．(2-30)，(2-31) を組み合わせると

$$\overline{\boldsymbol{e}}_j=\sum_i a_{ji}\boldsymbol{e}_i \tag{5-42}$$

この a_{ji} の集りはいわゆる行列となる．この行列を S と書くことにすれば，S は3行3列である．

$$S=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{5-43}$$

回転を知ることは行列 S を t の関数として与えることである．この行列は直交行列と呼ばれる．すなわち S の行と列とを入れ換えた行列を S^T と記して

$$S^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{5-44}$$

としたときに，次の関係が成り立つ．

$$SS^T=S^TS=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{（単位行列）} \tag{5-45}$$

その理由は，行列 A の第 i 行第 j 列成分を A_{ij} と書くことにしたときに

$$\begin{aligned} (SS^T)_{ij} &= \sum_k S_{ik}S^T_{kj} \\ &= \sum_k a_{ik}a_{jk} \\ &= \sum_k (\bar{\boldsymbol{e}}_i, \boldsymbol{e}_k)(\bar{\boldsymbol{e}}_j, \boldsymbol{e}_k) \\ &= (\bar{\boldsymbol{e}}_i, \bar{\boldsymbol{e}}_j) = \delta_{ij}, \\ (S^TS)_{ij} &= \sum_k S^T_{ik}S_{kj} \\ &= \sum_k a_{ki}a_{kj} \\ &= \sum_k (\bar{\boldsymbol{e}}_k, \boldsymbol{e}_i)(\bar{\boldsymbol{e}}_k, \boldsymbol{e}_j) \\ &= (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

これで (5-45) 式が証明されたことになる．この式はまた

$$S^T=S^{-1} \tag{5-46}$$

と書くこともできる．ただし S^{-1} は S の逆行列と呼ばれ，一般に行列 A の逆行列 A^{-1} というものは次の式で定義される．

$$AA^{-1}=A^{-1}A=\text{単位行列} \tag{5-47}$$

次に行列の微分を次式で定義する．行列 A の (ij) 成分を a_{ij} としたときに，$A=(a_{ij})$ と書く．このときに

$$\frac{dA}{dt}=\left(\frac{da_{ij}}{dt}\right) \tag{5-48}$$

この定義から明らかなように

$$\frac{d}{dt}(A+B)=\frac{dA}{dt}+\frac{dB}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}(AB)=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt} \tag{5-49}$$

次に行と列との入換え，すなわち転置についての公式

$$(AB)^T=B^TA^T \tag{5-50}$$
$$(A^T)^T=A \tag{5-51}$$

を導入する．(5-51) は明らかなので (5-50) を証明する．

$$\begin{aligned}(AB)^T_{ij}&=(AB)_{ji}\\&=\sum_k A_{jk}B_{ki}\\&=\sum_k B^T_{ik}A^T_{kj}\\&=(B^TA^T)_{ij}\end{aligned}$$

次に方程式 (5-45) を時間 t について微分してみよう．

$$\frac{dS}{dt}S^T+S\frac{dS^T}{dt}=0 \tag{5-52}$$

ところが第2項を転置すると第1項になる．すなわち

$$\left(S\frac{dS^T}{dt}\right)^T=\frac{dS}{dt}S^T$$

したがって (5-52) は次のように書くことができる．

$$\frac{dS}{dt}S^T=-\left(\frac{dS}{dt}S^T\right)^T \tag{5-53}$$

すなわち，この行列を転置すると符号が変わる．行と列とを入れ換えて符号が変わるような行列の最も一般的な形は

$$\Omega=\begin{pmatrix}0 & \omega_3 & -\omega_2\\ -\omega_3 & 0 & \omega_1\\ \omega_2 & -\omega_1 & 0\end{pmatrix} \tag{5-54}$$

のように書ける．したがって

$$\frac{dS}{dt}S^T=\frac{dS}{dt}S^{-1}=\Omega$$

したがって右から S を乗じると

$$\frac{dS}{dt}=\Omega S \tag{5-55}$$

もし行列 Ω が時間の関数として与えられれば，行列 S は (5-55) の微分方程式を解くことにより定まり，回転の様子がわかることになる．ところで Ω の三つの成分 ω_1, ω_2, ω_3 を成分とするベクトルを回転ベクトルと呼ぶ．その理由を説明しよう．

(5-55) 式を成分にわけて書くと

$$\dot{a}_{ij}=\sum_k \Omega_{ik}a_{kj} \tag{5-56}$$

ところが (5-54) 式をよく見ると次のように表わせる．

$$\Omega_{ij}=\sum_k \varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{5-57}$$

ただし ε_{ijk} は (2-22) によって定義されている．したがって

$$\dot{a}_{ij}=\sum_{k,l} \varepsilon_{ikl}\omega_l a_{kj}$$

そこで次の式を微分する．

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i=\sum_j a_{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{5-58}$$

その際に $\boldsymbol{e}_j$ は t によらないことを使うと

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_i&=\sum_j \dot{a}_{ij}\boldsymbol{e}_j\\&=\sum_{j,k,l}\varepsilon_{ikl}\omega_l a_{kj}\boldsymbol{e}_j\\&=\sum_{k,l}\varepsilon_{lik}\omega_l\bar{\boldsymbol{e}}_k\\&=\sum_l \omega_l\bar{\boldsymbol{e}}_l\times\bar{\boldsymbol{e}}_i\\&=\boldsymbol{\omega}\times\bar{\boldsymbol{e}}_i\end{aligned} \tag{5-59}$$

ただし $\boldsymbol{\omega}$ というベクトルは

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_1\bar{\boldsymbol{e}}_1+\omega_2\bar{\boldsymbol{e}}_2+\omega_3\bar{\boldsymbol{e}}_3 \tag{5-60}$$

したがって (5-41) を t について微分すると

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_j=x_j\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_1+y_j\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_2+z_j\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_3=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_j$$

これは重心を通り，$\boldsymbol{\omega}$ を軸として $|\boldsymbol{\omega}|$ を回転の角速度として剛体を回転させたときに，重心からの位置ベクトルが $\boldsymbol{r}'$ で与えられる点の速度が $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$ と

なることを意味し，このようなベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を通常回転ベクトルと呼ぶ．このベクトル $\boldsymbol{\omega}$ がわかれば Ω がわかり，したがって S が決定されることになる．

5-6　剛体の回転の方程式

剛体の回転のエネルギーを $\boldsymbol{\omega}$ で表わしてみよう．これを T_R と記すことにすると

$$
\begin{aligned}
T_R &= \frac{1}{2}\sum_j m_j(\dot{\boldsymbol{r}}_j')^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_j m_j(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_j')^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_j m_j(\boldsymbol{r}_j'^2\cdot\boldsymbol{\omega}^2-(\boldsymbol{r}_j',\boldsymbol{\omega})^2)
\end{aligned}
\tag{5-61}
$$

そこでこの式を簡単化するために

$$
I_{ab}=\sum_j m_j(\delta_{ab}\boldsymbol{r}_j'^2-r_{ja}'r_{jb}') \qquad (a, b=1, 2, 3) \tag{5-62}
$$

とおく．ただし r_{ja}' は $\boldsymbol{r}_j'$ の a 成分である．もし質点の集りである剛体を連

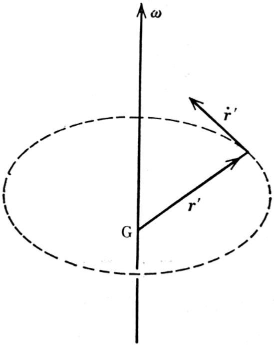


図 5-1　回転ベクトル $\boldsymbol{\omega}$
重心 G を通るベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を軸として剛体が回転するときに重心 G からの位置ベクトルが $\boldsymbol{r}'$ で与えられる点の回転速度は $\dot{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$ で与えられる．

続体でおき換えれば

$$I_{ab}=\int\rho(\boldsymbol{r}')(\delta_{ab}\boldsymbol{r}'^2-r_a'r_b')dx'dy'dz' \tag{5-63}$$

ただし $\rho(\boldsymbol{r}')$ は点 $\boldsymbol{r}'$ における密度で，(5-62) から (5-63) に移るには次のおき換えをしている．

$$\sum_j m_j\cdots\to\int dm\cdots\to\int\rho(\boldsymbol{r}')dx'dy'dz'\cdots$$

このとき T_R は ω を用いて次のように表わされる．

$$T_R=\frac{1}{2}\sum_{a,b}I_{ab}\omega_a\omega_b \tag{5-64}$$

これは剛体が重心の周りを回転するときの運動エネルギーであり，I_{ab} を慣性テンソルと称する．$\rho dxdydz$ を簡単に dm と書くことにすると，

$$\begin{aligned}
I_{11}&=\int(y^2+z^2)dm, \qquad & I_{23}&=I_{32}=-\int yzdm\\
I_{22}&=\int(z^2+x^2)dm, \qquad & I_{31}&=I_{13}=-\int zxdm\\
I_{33}&=\int(x^2+y^2)dm, \qquad & I_{12}&=I_{21}=-\int xydm
\end{aligned} \tag{5-65}$$

次に角運動量 $\boldsymbol{L}'$ を $\boldsymbol{\omega}$ で表現してみよう．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}'&=\sum_j m_j\boldsymbol{r}_j'\times\dot{\boldsymbol{r}}_j'\\
&=\sum_j m_j\boldsymbol{r}_j'\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_j')\\
&=\sum_j m_j[\boldsymbol{r}_j'^2\cdot\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{r}_j',\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}_j']
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
L_a'&=\sum_j m_j[\delta_{ab}\boldsymbol{r}_j'^2-r_{ja}'r_{jb}']\omega_b\\
&=\sum_b I_{ab}\omega_b
\end{aligned} \tag{5-66}$$

これを (5-64) と比べれば直ちに次式を得る．

$$T_R=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{L}') \tag{5-67}$$

さて剛体の回転の方程式を求めるには，(5-38) 式を $\boldsymbol{\omega}$ によって表現しなけ

ればならない．その前に一つの簡単化をしておこう．回転のエネルギーを与える式 (5-64) は正定値であり，一つの剛体に固定した座標系 $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \bar{\boldsymbol{e}}_2, \bar{\boldsymbol{e}}_3$ に対する表式である．ところで

$$\sum_{a,b} I_{ab}\omega_a\omega_b = 1 \tag{5-68}$$

は三次元の ω 空間で楕円体の表面を表わす式となる．三次元解析幾何によれば，剛体に固定した新しい座標軸 $\bar{\boldsymbol{e}}'_1, \bar{\boldsymbol{e}}'_2, \bar{\boldsymbol{e}}'_3$ をうまく選べば

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\bar{\boldsymbol{e}}_1 + \omega_2\bar{\boldsymbol{e}}_2 + \omega_3\bar{\boldsymbol{e}}_3 = \omega'_1\bar{\boldsymbol{e}}'_1 + \omega'_2\bar{\boldsymbol{e}}'_2 + \omega'_3\bar{\boldsymbol{e}}'_3 \tag{5-69}$$

としたときに

$$\sum_{a,b} I_{ab}\omega_a\omega_b = A\omega_1'^2 + B\omega_2'^2 + C\omega_3'^2 \tag{5-70}$$

のような標準形で表わすことができる（詳細は付録参照）．このときに $\bar{\boldsymbol{e}}'_1, \bar{\boldsymbol{e}}'_2, \bar{\boldsymbol{e}}'_3$ の方向を慣性主軸と呼び，A, B, C を主慣性能率と呼ぶ．このときに

$$\begin{aligned}
A = I'_{11} &= \int (y'^2 + z'^2)\,dm, \qquad I'_{23} = I'_{32} = -\int y'z'\,dm = 0 \\
B = I'_{22} &= \int (z'^2 + x'^2)\,dm, \qquad I'_{31} = I'_{13} = -\int z'x'\,dm = 0 \\
C = I'_{33} &= \int (x'^2 + y'^2)\,dm, \qquad I'_{12} = I'_{21} = -\int x'y'\,dm = 0
\end{aligned} \tag{5-71}$$

今後剛体に固定した座標系を上の標準形が成り立つように選び，$\bar{\boldsymbol{e}}'$ を単に $\bar{\boldsymbol{e}}$ と書くことにする．そこで $\boldsymbol{L}'$ を

$$\boldsymbol{L}' = \sum_j m_j[\boldsymbol{r}_j'^2\cdot\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r}'_j, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}'_j]$$

のように表わして時間微分をする．このときに $\boldsymbol{r}_j'^2$ は不変であり，かつ次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}'_j, \boldsymbol{\omega}) &= (\dot{\boldsymbol{r}}'_j, \boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{r}'_j, \dot{\boldsymbol{\omega}}) \\
&= (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_j, \boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{r}'_j, \dot{\boldsymbol{\omega}}) \\
&= (\boldsymbol{r}'_j, \dot{\boldsymbol{\omega}})
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} &= \sum_j m_j[\boldsymbol{r}_j'^2\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}} - (\boldsymbol{r}'_j, \dot{\boldsymbol{\omega}})\boldsymbol{r}'_j - (\boldsymbol{r}'_j, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_j] \\
&= \boldsymbol{N}'
\end{aligned} \tag{5-72}$$

両辺の x 成分をとり，(5-71) 式を考慮すると

$$\dot{\omega}_1\int dm(y^2+z^2)-\int dm(x\omega_1+y\omega_2+z\omega_3)(\omega_2 z-\omega_3 y)=N_1'$$

あるいはもう少し整理すると

$$\dot{\omega}_1\int dm(y^2+z^2)-\omega_2\omega_3\int dm(z^2-y^2)=N_1'$$

そこで (5-71) の記号を用いると

$$A\dot{\omega}_1-(B-C)\omega_2\omega_3=N_1' \tag{5-73}$$

同様に

$$B\dot{\omega}_2-(C-A)\omega_3\omega_1=N_2' \tag{5-74}$$

$$C\dot{\omega}_3-(A-B)\omega_1\omega_2=N_3' \tag{5-75}$$

ただし

$$\boldsymbol{N}'=N_1'\overline{\boldsymbol{e}}_1+N_2'\overline{\boldsymbol{e}}_2+N_3'\overline{\boldsymbol{e}}_3 \tag{5-76}$$

であり，この $\overline{\boldsymbol{e}}_j$ は慣性主軸方向の単位ベクトルである．

上述の方程式を Euler の方程式と称する．特に $\boldsymbol{N}'=0$ のときには，三つの Euler の方程式にそれぞれ ω_1, ω_2, ω_3 を乗じて加えれば

$$A\omega_1\dot{\omega}_1+B\omega_2\dot{\omega}_2+C\omega_3\dot{\omega}_3=0$$

すなわち

$$\frac{d}{dt}T_R=0 \tag{5-77}$$

という回転エネルギーの保存則を得る．

剛体の運動は複雑なのでこれ以上の議論はしないが，ただ前章の量子論との関連について一言述べておく．剛体というものは内部自由度を凍結した系であるが，ミクロの系では基底状態における $\boldsymbol{L}'^2$ の値が一定であり，その値によってその系のスピンと呼ばれる自転角運動量が定義される．$\boldsymbol{L}'^2$ の値を変えるためにはやはり内部自由度を励起しなければならない．素粒子や原子核は $\boldsymbol{L}'^2$ のただ一つの値に対応するが，$\boldsymbol{L}'^2$ が連続的に変わりうるような系，あるいは異なる $\boldsymbol{L}'^2$ の値をとりうるような剛体に最も似たミクロの系は，ある系の基底状態および角運動量のみ励起された状態をまとめたもので Regge 軌道と呼ばれる．

第 6 章

慣性系について

6-1　重力場の中で慣性系を作ること

第1章で述べたように Newton の法則は慣性の法則から始まる．しかしながらこのような慣性系の概念は高度に理想化されたものであり，しかもこの法則を成立させるためには適当な座標系を設定しなければならない．それは座標系を決めることなしに等速直線運動を議論することはできないからである．このような慣性系として，第1章では太陽系に固定した座標系を設定して，そこから十分離れた空間で第一法則を定式化した．さて地表では重力が存在するので，地球まで含めた系を考え，地球による重力を内力として考えなければ慣性系が定義できない．しかしながら地球までも系に含めることは系をあまり大きくし過ぎてあまり実用的ではない．

そこで地表において慣性系を作ることができないか，ということが問題になる．もちろんいま考える系は地球と比べて十分小さく，重力以外には外力が働

かないとする．そうすると少なくとも局所的には慣性系を作ることができる．

いま地表で質点系を考え，作用反作用の法則を満たす内力と，外力としての重力が働いているとする．このとき重力による加速度 g が一定とみなせるような局所的空間において質点の運動方程式は

$$m_j\frac{d^2\boldsymbol{r}_j}{dt^2}=\sum_{i\neq j}\boldsymbol{F}(i\to j)+m_j\boldsymbol{G} \tag{6-1}$$

ただし $\boldsymbol{G}$ は重力場を表わし次式で与えられる．

$$\boldsymbol{G}=(0,0,-g) \tag{6-2}$$

ここで座標系は地表に固定し，地表が xy 平面であり，鉛直上方に z 軸を選ぶものとする．また $\boldsymbol{F}(i\to j)$ なる内力は $\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j$ のみによるものとする．このときにこの質点系を十分大きい箱に入れ，この箱に固定した座標軸を考える．話を簡単にするために底面が xy 平面と，すなわち地表と平行であるとし，その2稜がそれぞれ x 軸，y 軸と平行であるとして x' 軸，y' 軸を設定する．更に鉛直な稜を z 軸と重ねて z' 軸を設定する．いまこの箱が重力により自由落下するとする．いわば綱の切れたエレベーターである．このときに，$t=0$ での箱の原点 O′ の高さを z_0 とすると，$t=0$ での O′ の座標は地表か

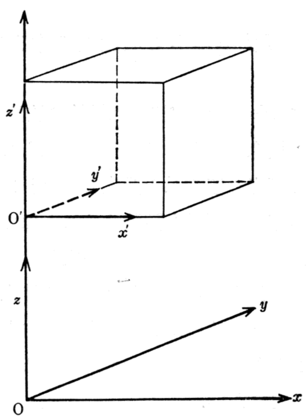


図 6-1　重力場の中で慣性系を作る方法
説明については本文を見よ．

ら見て，$(0, 0, z_0)$ となる．さて箱の座標系から見た j 番目の質点の座標を $\boldsymbol{r}'_j$ とすると

$$\boldsymbol{r}'_j = \overrightarrow{\mathrm{O'P}}_j, \qquad \boldsymbol{r}_j = \overrightarrow{\mathrm{OP}}_j \tag{6-3}$$

であるから

$$\boldsymbol{r}_j = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \boldsymbol{r}'_j \tag{6-4}$$

さて箱を初速度 $(0, 0, v_0)$ で自由落下させたとすると，O′ の地表の座標系から見た座標は，時刻 t において

$$\overrightarrow{\mathrm{OO'}} = \left(0, 0, z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right) \tag{6-5}$$

次に運動方程式 (6-1) を箱に固定した座標系で表現する．まず $\boldsymbol{F}(i \to j)$ を次の形に仮定する．

$$\boldsymbol{F}(i \to j) = \boldsymbol{F}_{i \to j}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \tag{6-6}$$

そうすると

$$\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}'_i - \boldsymbol{r}'_j \tag{6-7}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \boldsymbol{r}_j}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \frac{d^2 \boldsymbol{r}'_j}{dt^2} \\ &= \boldsymbol{G} + \frac{d^2 \boldsymbol{r}'_j}{dt^2} \end{aligned} \tag{6-8}$$

であるから，これを (6-1) に代入すると

$$m_j \frac{d^2 \boldsymbol{r}'_j}{dt^2} = \sum_{i \neq j} \boldsymbol{F}_{i \to j}(\boldsymbol{r}'_i - \boldsymbol{r}'_j) \tag{6-9}$$

となり，外力が消えている．したがってこの系の重心は，箱に固定した座標系に関しては，等速直線運動をすることになり，自由落下する箱に固定した座標系は慣性系である．この箱は現実の箱である必要はなくて，(6-5) で定義される運動をする座標系であればよい．このようなことができたのは重力が質量に比例し，したがって重力による加速度がすべての質点に対して共通だからである．重力以外の外力に対しては上のような慣性系は作れない．上の考察は Einstein により，一般相対論を建設するための基礎として用いられ，これから等価原理と呼ばれる仮定が導かれた．すなわち，重力は座標系の加速によって局所的に消すことができるということである．

次に慣性系が一つ存在するときに，他にも慣性系が作れるかどうかを考えてみよう．

6-2　Galilei 変換

慣性系においては外力は働かず内力しかない．上述の例で，箱に固定した座標系は慣性系であることを示した．ところがこの座標系は一通りではなくて何通りも選べることは，初速度 v_0 を自由に選べることからわかる．v_0 を変えるとお互いに等速運動をしている慣性系が無数に存在することになる．そこで慣性系に対して等速直線運動をしている座標系はやはり慣性系であることを改めて示す．

いま $t=0$ で一致している二つの座標系 O と O′ とを考える．また原点 O′ は O に対して $\boldsymbol{v}$ なる速度で等速直線運動をしているとしよう．しからば点 P の座標を $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\boldsymbol{r}'=\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$ としたときに

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'P}},\quad \text{あるいは}\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{r}' \tag{6-10}$$

が成り立つ．そこで方程式

$$m_j\frac{d^2\boldsymbol{r}_j}{dt^2}=\sum_{i\neq j}\boldsymbol{F}_{i\to j}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j) \tag{6-11}$$

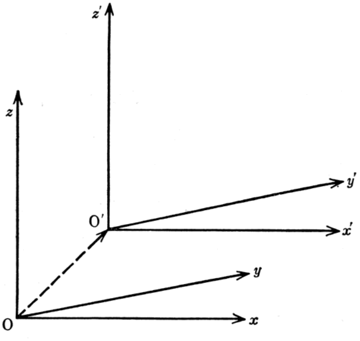


図 6-2　Galilei 変換
説明は本文を見よ．

に (6–10) を代入すると

$$m_j \frac{d^2 \boldsymbol{r}'_j}{dt^2} = \sum_{i \neq j} \boldsymbol{F}_{i \to j}(\boldsymbol{r}'_i - \boldsymbol{r}'_j) \tag{6-12}$$

となり，運動方程式の形は全く同じである．このことを運動方程式は変換 (6–10) に対して不変であるという．変換 (6–10) と，無意識に仮定した $t'=t$ とを合わせ，

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t, \qquad t' = t \tag{6-13}$$

を Galilei 変換と呼ぶ．しからば，運動方程式は Galilei 変換に対して不変であり，慣性系は Galilei 変換により他の慣性系に移るということができる．

6-3 Galilei 変換群

慣性系を他の慣性系へ移す Galilei 変換は群を作る．これを Galilei 変換群と称する．ここで高校で習った群について復習しておく．

次のような公理を満たす集合 G を群と呼ぶ．

1) G の任意の要素 a, b に対して，結合（和・積など）という演算が定義され，これを $a \cdot b$ と書いたときに，$a \cdot b$ もやはり G の要素となる．
2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$，これを結合則と呼ぶ．
3) G の任意の要素 a に対して，$a \cdot e = e \cdot a = a$ が成り立つような要素 e が G の中に存在する．e を単位元と呼ぶ．
4) G の任意の要素 a に対して，$a \cdot b = b \cdot a = e$ となるような G の要素 b が存在する．この b を a の逆元と呼び，a^{-1} と記す．

第2章で述べたベクトルは，結合として和をとったときに群を作り，これを加群と呼ぶ．

さて (6–13) の変換を $T(\boldsymbol{v})$ と書けば，次式が成り立つ．

$$T(\boldsymbol{v}')\,T(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}) \tag{6-14}$$

すなわち，

$$T(\boldsymbol{v}):\ \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t,\ \ t' = t$$

$$T(\boldsymbol{v}'):\ \boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{v}'t',\ \ t'' = t'$$

により，$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}' \to \boldsymbol{r}''$，$t \to t' \to t''$ なる変換の積を作ると

$$\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v})t,\quad t''=t$$

となるからである．最後の結果は，(6–14) の右辺のように書ける．したがって二つの Galilei 変換に対して結合，あるいは積が定義され，その結果もやはり Galilei 変換となる．結合則の成立は明らかであり，それは $\boldsymbol{v}$ というベクトルが加法群をなすことから示される．また $T(\boldsymbol{0})$ は単位元であり，$T(-\boldsymbol{v})$ は $T(\boldsymbol{v})$ の逆元である．したがって Galilei 変換は群をなす．

以上の考察は，一見不必要なことのようであるが，Galilei 変換群を拡張して，特殊 Lorentz 変換群を出すときに重要な意義をもつ．いま $\boldsymbol{v}$ の方向を任意としたが，$\boldsymbol{v}$ の方向を x 軸方向に限ることにして

$$T(v):\ x'=x-vt,\quad t'=t \tag{6–15}$$

により特殊 Galilei 変換を定義する．そして

$$T(v_1)\,T(v_2)=T(v) \tag{6–16}$$

のときに

$$v_1\oplus v_2=v \tag{6–17}$$

と書くことにしよう．特殊 Galilei 変換に対しては

$$v=v_1+v_2 \tag{6–18}$$

が成立する．これを Galilei 変換に対する速度の加法定理と呼ぶ．

6-4　特殊 Lorentz 変換群

Newton の運動方程式は Galilei 変換に対して不変であることは上に見た通りである．したがって慣性系同士の変換は Galilei 変換によって与えられると考えられる．しかしながら Galilei 変換では常に $t'=t$ を仮定している．ある座標系とそれに対して等速運動をしている座標系とでは時計の進み方が同じであるという仮定は自明であろうか？　このような疑問を呈するのは，電磁現象を記述する Maxwell の方程式は Galilei 変換に対して不変ではないからである．この疑問はまた Einstein による特殊相対論の出発点ともなったものであるが，この本ではそこまで議論するのは目的ではないので形式的に Galilei 変換を一般化するとしたらどんな変換が可能であるかを調べてみる．(6–15) の特殊 Galilei 変換は x, t から x', t' へ移る一次変換であり，行例を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = T(v) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{6-19}$$

のごとく表わせる．ただし $T(v)$ は2行2列の行列で

$$T(v) = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6-20}$$

と表わせる．考えうる一般化は $t'=t$ という制限を除き，(6-19) の一次変換 $T(v)$ にもっと一般的な形を仮定することである．$x'=0$ が $x=vt$ に対応するという条件を満たす最も一般的な $T(v)$ の形は

$$T(v) = \begin{pmatrix} a(v) & -va(v) \\ b(v) & c(v) \end{pmatrix} \tag{6-21}$$

ここに a, b, c はいずれも v の関数であり，その関数形は $T(v)$ が群を作るという条件で決定される．そこで $T(v)$ という行列の集合が群をなすという条件を次の方程式で表わすことにする．

$$T(v_1)\, T(v_2) = T(v) \tag{6-22}$$

また特殊 Galilei 変換のときと同様にこの群は可換群と考える．

$$T(v_1)\, T(v_2) = T(v_2)\, T(v_1) \tag{6-23}$$

(6-22) に (6-21) を代入して，両辺の行列要素を比べると

$$a(v) = a(v_1) a(v_2) - v_1 a(v_1) b(v_2) \tag{6-24}$$

$$-va(v) = -v_2 a(v_1) a(v_2) - v_1 a(v_1) c(v_2) \tag{6-25}$$

$$b(v) = b(v_1) a(v_2) + c(v_1) b(v_2) \tag{6-26}$$

$$c(v) = -v_2 a(v_2) b(v_1) + c(v_1) c(v_2) \tag{6-27}$$

さて (6-23) により，上式の右辺はいずれも v_1 と v_2 との対称関数でなければならないから，(6-24) から

$$v_1 a(v_1) b(v_2) = v_2 a(v_2) b(v_1)$$

したがって

$$\frac{b(v_1)}{v_1 a(v_1)} = \frac{b(v_2)}{v_2 a(v_2)} = \lambda \tag{6-28}$$

は v によらない定数でなければならない．次に (6-25)，(6-26) の対称性から

$$c(v) = a(v) \tag{6-29}$$

となり，$T(v)$ の形は $a(v)$ が因数として外に出され，

$$T(v)=a(v)\begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\lambda v & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられることになる．この形を（6-22）に代入すると

$$a(v_1)a(v_2)\begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ -\lambda v_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ -\lambda v_2 & 1 \end{pmatrix}=a(v)\begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\lambda v & 1 \end{pmatrix} \tag{6-30}$$

ところが左辺は次のように書ける．

$$a(v_1)a(v_2)(1+\lambda v_1 v_2)\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{v_1+v_2}{1+\lambda v_1 v_2} \\ -\lambda\dfrac{v_1+v_2}{1+\lambda v_1 v_2} & 1 \end{pmatrix}$$

これを（6-30）の右辺と比べると

$$a(v)=a(v_1)a(v_2)(1+\lambda v_1 v_2) \tag{6-31}$$

$$v=\frac{v_1+v_2}{1+\lambda v_1 v_2} \tag{6-32}$$

すなわち，我々は次のような速度の加法定理を得る．

$$v_1 \oplus v_2=\frac{v_1+v_2}{1+\lambda v_1 v_2} \tag{6-33}$$

さて $T(0)$ は単位行列に等しいから $a(0)=1$ である．そこで $a(v)$ を v の偶関数と仮定し，$v_1=-v_2=v$ とおいて，（6-31）に代入すると，

$$(a(v))^2(1-\lambda v^2)=1$$

すなわち

$$a(v)=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda v^2}} \tag{6-34}$$

$$T(v)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda v^2}} & \dfrac{-v}{\sqrt{1-\lambda v^2}} \\ \dfrac{-\lambda v}{\sqrt{1-\lambda v^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda v^2}} \end{pmatrix} \tag{6-35}$$

この式から明らかなように，λ は速度の逆自乗の次元をもっている．以下において速度の加法定理を用いて λ が正であることを示す．それにはもし λ が負ならば矛盾を生ずることを示せばよい．λ が負のときには

$$\lambda=-\frac{1}{v_0^2} \tag{6-36}$$

とおくことができる．v_0 は速度の次元の量である．さて

$$\frac{v_1}{v_0}=\tan\theta_1, \qquad \frac{v_2}{v_0}=\tan\theta_2 \tag{6-37}$$

とおいてやると

$$v_1\oplus v_2=\frac{v_1+v_2}{1-\dfrac{v_1v_2}{v_0^2}}=v_0\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=v_0\tan(\theta_1+\theta_2) \tag{6-38}$$

したがって v ずつ速度の違う $(n+1)$ 個の系を考えて，$v=v_0\tan\theta$ とすると，初めの系と最後の系の相対速度は $v_0\tan n\theta$ となる．もし n が十分大きくなれば $\tan n\theta$ は無限大になったり，$\tan\theta$ と異符号になったりする．これは物理的に理解できない結果で，因果律の条件に反するものと解釈される．ゆえに我々は λ を正とし，次の形におく．

$$\lambda=\frac{1}{v_0^2} \tag{6-39}$$

問題は v_0 の値である．実は v_0 は宇宙における制限速度である．すなわち，もし v_1 も v_2 も v_0 より小さければ，$v_1\oplus v_2$ も v_0 より小さくなるからである．

$$\begin{aligned}v_0-(v_1\oplus v_2)&=v_0-\frac{v_1+v_2}{1+\dfrac{v_1v_2}{v_0^2}}\\&=v_0\frac{\left(1-\dfrac{v_1}{v_0}\right)\left(1-\dfrac{v_2}{v_0}\right)}{1+\dfrac{v_1v_2}{v_0^2}}>0\end{aligned}$$

したがって，v_0 より小さい速度をいかに合成しても v_0 に達することはできない．他方 v_0 と他の速度の加法定理は

$$v_0\oplus v=\frac{v_0+v}{1+\dfrac{v}{v_0}}=v_0 \tag{6-40}$$

すなわち v_0 という速度は普遍的で，一つの慣性系で v_0 で走っているものは

他の慣性系から見ても v_0 となる．実験によれば，光速度がこの性質を満たしており，光の速度はどのような慣性系で測っても同じで，その値は

$$c=2.997925\times10^8\ \mathrm{m/sec} \tag{6-41}$$

である†．したがって v_0 は c と等しいことになる．すなわち，

$$a(v)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{6-42}$$

となり，結局変換 $T(v)$ は次のようになる．

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\qquad t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{6-43}$$

この変換を特殊 Lorentz 変換と呼ぶ．特殊相対論では光速度不変の原理，すなわち (6-40) から出発して出すが，ここでは群の性質から導き出した．この変換に対して，Maxwell の方程式は不変である．また $c\to\infty$ という極限では，上の変換は Galilei 変換に帰着させられる．

Einstein は Newton の方程式を Lorentz 変換に対して不変になるように修正し，特殊相対論を展開した．

† これを光速度不変の原理と呼ぶ．

第 7 章

Lagrange の方程式

7-1 Lagrange の方程式

いままで運動方程式はすべて直交座標系で書いてきた．しかしながら問題によっては極座標系とか円筒座標系などで表わした方が便利なことがある．また拘束条件のために自由度が減る場合などでも変数の選び方に工夫を加えた方がよいことがある．

このような目的のためには，Lagrange の運動方程式を用いると便利である．以下ではこの方程式について紹介しよう．Lagrange の方程式は，通常変分原理，あるいは Hamilton の原理と呼ばれるものから導き出されるが，ここでは数学的にあまり深入りすることは避け，変分原理は用いないことにする．

いま一つの質点系を考え，それに対してポテンシャルで表わされる保存力と，与えられた拘束条件に対応する滑らかな拘束力が働くものとする．拘束力を表わすためには，通常 Lagrange の不定乗数の方法というものが用いられ

るが，再び数学的深入りを避けるためにこれも用いないことにする．我々はできるだけ直観的で直接的な方法を用いることにする．Lagrange の不定乗数の方法に代わる武器として次の原理を用いる．

"滑らかな拘束条件が課せられたときに，系の運動がこの条件を満たしている限り，拘束力は仕事をしない．"

さて上述の質点系に対して次の運動方程式を設定する．

$$m_j\frac{d^2\boldsymbol{r}_j}{dt^2}=-\nabla_jU+\boldsymbol{N}_j \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{7-1}$$

ただし ∇_j は微分演算を表わすベクトルである．

$$\nabla_j=\left(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial y_j},\frac{\partial}{\partial z_j}\right) \tag{7-2}$$

そして $\boldsymbol{N}_j$ は与えられた拘束条件を満たすように加えられた滑らかな拘束力である．与えられた系の Lagrangian，あるいは Lagrange 関数を次式で定義する．

$$L=T-U \tag{7-3}$$

ここに T は全系の運動エネルギーであり，U は全系のポテンシャル・エネルギーである．今後簡単のためにすべての質点の質量を等しいとする．もちろんこの結果を質量が等しくない場合に拡張するのは容易である．このとき

$$T=\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{2}m\dot{x}_k^2 \tag{7-4}$$

ここでは x,y,z を添字で区別して x という文字だけを使っている．次に $3n$ 個の新しい変数 $q_1,q_2,\cdots,q_{3n}$ を導入し，x_k はその関数であるとする．

$$x_k=x_k(q_1,\cdots,q_{3n}), \qquad (k=1,2,\cdots,3n) \tag{7-5}$$

この q の選び方はお互いに独立であれば勝手であるが，拘束条件があるときには以下に述べるように選ぶ．まず (7-5) を逆に解いて

$$q_j=q_j(x_1,\cdots,x_{3n}) \tag{7-6}$$

と書けるが，r 個の拘束条件があるときに，$f=3n-r$ がこの系の自由度となる．このときに

$$q_1,q_2,\cdots,q_f \tag{7-7}$$

を自由な変数とし，残りの変数は拘束条件が

$$q_{f+1}=0,\ \cdots,\ q_{3n}=0 \tag{7-8}$$

で与えられるように q の組を選ぶことにしよう．

合成関数の微分の公式により

$$\dot{x}_k=\frac{dx_k}{dt}=\sum_j\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\cdot\frac{dq_j}{dt}=\sum_j\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\dot{q}_j \tag{7-9}$$

この式より

$$T=\sum_k\frac{1}{2}m\left(\sum_j\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2 \tag{7-10}$$

これから

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial q_i}&=\sum m\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i\partial q_l}\dot{q}_l\right)\\&=\sum m\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i\partial q_l}\dot{q}_j\dot{q}_l\end{aligned} \tag{7-11}$$

ただし上の和は，j, k, l のごとく一つの表式に 2 度ずつ現われる添字について加えたものである．以下でも同様な省略を行うと

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=\sum m\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\dot{q}_j \tag{7-12}$$

この章での計算では偏微分に関する公式を色々と用いているので，偏微分に関する教科書を参照されたい．これは高校の数学の範囲を超えるが，偏微分なしでは，Lagrange の方程式を理解することはできないのである．さて

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\\&=\sum m\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i\partial q_l}\dot{q}_j\dot{q}_l-\frac{\partial U}{\partial q_i}\\&\quad-\sum m\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\dot{q}_j\right)\end{aligned} \tag{7-13}$$

ところで第 3 項を詳しく書くと

$$\begin{aligned}&-\sum m\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i\partial q_l}\dot{q}_j\dot{q}_l\\&-\sum m\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_j\partial q_l}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_l\end{aligned}$$

$$-\sum m\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\ddot{q}_j \tag{7-14}$$

この第1項は，(7-13) の第1項と打ち消し合う．また (7-13) の第2項は

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i}=-\sum\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\frac{\partial U}{\partial x_k} \tag{7-15}$$

と書けるので，(7-13) を書き直すと

$$-\sum\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}+m\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_j\partial q_l}\dot{q}_j\dot{q}_l+m\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\ddot{q}_j\right) \tag{7-16}$$

ところが括弧の中の第2，第3項をまとめて

$$\sum\left(m\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_j\partial q_l}\dot{q}_j\dot{q}_l+m\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\ddot{q}_j\right)=m\frac{d}{dt}\left(\sum\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)=m\ddot{x}_k$$

と書けるから (7-16) は結局

$$-\sum\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}+m\ddot{x}_k\right)$$

しかるに

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right)=-\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}+m\ddot{x}_k\right)$$

であるから，結局次の式が得られる．

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\sum_k\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\left[\frac{\partial L}{\partial x_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right)\right] \tag{7-17}$$

この式は L のある種の微分，Euler 微分，の変換性を示している．

$$[L]_{q_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

を L の Euler 微分と呼ぶ．しからば (7-17) は Euler 微分に対する変数変換の公式となる．

$$[L]_{q_i}=\sum\frac{\partial x_k}{\partial q_i}[L]_{x_k} \tag{7-18}$$

さて拘束力があるときの運動方程式は

$$[L]_{x_k}=-N_k \tag{7-19}$$

という形で与えられる．したがって

$$N_i = \sum \frac{\partial x_k}{\partial q_i} N_k \tag{7-20}$$

を定義すると

$$[L]_{q_i} = -N_i \tag{7-21}$$

が新しい座標系での運動方程式である．ところで

$$\sum N_k dx_k \tag{7-22}$$

は拘束力のなす仕事である．そこで N_i について調べてみることにしよう．そのためには運動方程式の解を（7-22）に代入しなければならない．

1) $i=1, 2, \cdots, f$ のときに

$$\frac{\partial x_k}{\partial q_i}$$

は，他の q をすべて固定して微分することになる．したがって q_i を変化させても拘束条件 (7-8) を破らないですむ．このときにはこの節の初めに述べた原理により拘束力は仕事をしないから，q_i のみを変化させたときに，それに対応する x の変化に対しては

$$\sum_k N_k dx_k = \left(\sum_k N_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right) dq_i = N_i dq_i = 0 \tag{7-23}$$

すなわち，$N_i=0$ となる．したがって方程式（7-21）は簡単に

$$[L]_{q_i} = 0 \qquad i=1, 2, \cdots, f \tag{7-24}$$

これで方程式は十分である．$3n$ 個の変数に対して，f 個しか方程式がないが，拘束条件（7-8）が $r=3n-f$ 個あるのでちょうど数が合う．これで運動方程式は完結するが，参考のために

2) $i=f+1, \cdots, 3n$ の場合について考えてみると，今度は q_i を変化させることにより拘束条件を破ってしまうから，拘束力は仕事をすることになる．

$$\sum_k N_k dx_k = \left(\sum_k N_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right) dq_i = N_i dq_i \neq 0 \tag{7-25}$$

したがって

$$[L]_{q_i} = -N_i \qquad i=f+1, \cdots, 3n \tag{7-26}$$

ところで運動方程式（7-24）と拘束条件（7-8）で解は決まってしまうの

でこれは余分な式となる．しかし左辺に解を代入することにより N_i が決まり，次に (7-20) の逆

$$N_k=\sum_i \frac{\partial q_i}{\partial x_k}N_i \tag{7-27}$$

より N_k が求まる．もしも拘束条件を満たす解を代入すれば，(7-27) は次のようになる．

$$N_k=\sum_{i=f+1}^{3n}\frac{\partial q_i}{\partial x_k}N_i \tag{7-28}$$

これが直交座標系における拘束力である．このように直交座標系では拘束力が陽に現われるが，うまい座標系を選ぶと，運動方程式 (7-24) のごとく拘束力が表に出てこない．したがって解くべき式をまとめると

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,f)$$
$$q_{f+1}=\cdots=q_{3n}=0 \tag{7-29}$$

7-2 単 振 子

振子の運動が一平面内に限定されているときに，これを単振子と呼ぶ．図 7-1 のように xy 軸を選び，極座標を導入すると

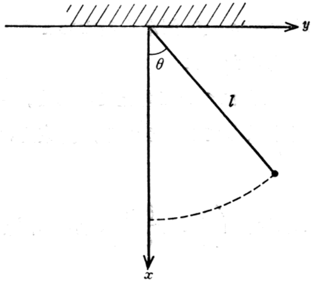


図 7-1 単 振 子
糸の先につけられた質点が，重力の下に一平面で糸の長さを変えないという拘束条件の下で運動する場合に，単振子と呼ばれる．

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta \tag{7-30}$$

そして重力によるポテンシャルは

$$U=-mgx=-mgr\cos\theta \tag{7-31}$$

この系の自由度はもともと2であるが，糸の長さが一定であるという拘束条件

$$r-l=0 \tag{7-32}$$

を課すると，自由度は1になってしまう．そこで

$$q_1=\theta,\qquad q_2=r-l \tag{7-33}$$

を新変数に選ぶと

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

$$=\frac{1}{2}m[\dot{q}_2^2+(q_2+l)^2\dot{q}_1^2] \tag{7-34}$$

$$U=-mg(q_2+l)\cos q_1 \tag{7-35}$$

そこで

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)=-mg(q_2+l)\sin q_1-\frac{d}{dt}[m(q_2+l)^2\dot{q}_1]=0 \tag{7-36}$$

$$q_2=0 \tag{7-37}$$

を連立させ，q_1 を再び θ と書くと

$$mgl\sin\theta+ml^2\ddot{\theta}=0$$

すなわち，書き直すと

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \tag{7-38}$$

これが単振子の方程式である．ここでは第3章でやったように糸の張力を拘束力として求める必要がないわけである．通常は θ が小さいとして $\sin\theta$ を θ で近似する．

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0 \tag{7-39}$$

これは既に第3章で解いた方程式となる．

7-3　斜面を転がり下りる円筒

角度αの斜面をすべらないで，すなわち摩擦なしで転がり下りる円筒の問題を考えよう．$t=0$ における位置を基準として転がった角度を θ としたときの運動方程式を求めよう．通常の取扱いでは円筒と斜面との接する点に拘束力が働き，斜面に沿っての平行移動と回転との両方の運動を考えねばならぬ．この拘束条件は，円筒が常に斜面に接しているということとすべらないということとがある．しかし Lagrange の方程式では自由な変数 θ のみを考えればよいので非常に簡単である．円筒の軸の周りの主慣性能率を I とし，この周りの回転のみを考えれば，回転の運動エネルギー T_R は

$$T_R=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \tag{7-40}$$

円筒の半径を a としたときに，θ だけ回転すると平行移動の距離は $a\theta$ となる．したがってこの円筒の質量を M とすると，重心の並進運動に対する運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}M(a\dot{\theta})^2 \tag{7-41}$$

で与えられる．また重力に対する位置エネルギーは

$$U=-Mg(a\theta)\sin\alpha \tag{7-42}$$

ゆえに

$$L=\frac{1}{2}(I+Ma^2)\dot{\theta}^2+Mga\theta\sin\alpha \tag{7-43}$$

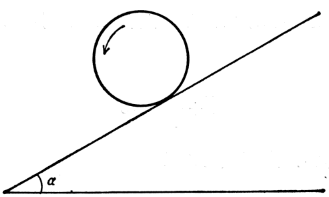


図 7-2　角度αの斜面をすべることなしに転がり下りる円筒

かくして運動方程式は直ちに得られる.

$$(I+Ma^2)\ddot{\theta}=Mga\sin\alpha \tag{7-44}$$

7-4 中心力による質点の運動

位置のエネルギーがある点――この点を原点に選ぶ――からの距離のみの関数とする.

$$U=U(r) \tag{7-45}$$

さて $r^2=x^2+y^2+z^2$ を x について偏微分すると

$$2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x$$

これから

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\quad \text{同様に}\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r} \tag{7-46}$$

ゆえに質点に働く力 $\boldsymbol{F}$ は $U(r)$ を微分して, (7-46) の公式を用いると次のごとく与えられる.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=-\nabla U(r)=-\frac{dU(r)}{dr}\nabla r\\&=-U'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\end{aligned} \tag{7-47}$$

そこで第3章で考えたように $t=0$ における $\boldsymbol{r}$ と $\dot{\boldsymbol{r}}$ とで作られる平面を xy 平面とすれば

$$F_z(x,y,z)=-\frac{U'(r)}{r}z \tag{7-48}$$

となるから

$$F_z(x,y,0)=0 \tag{7-49}$$

となり, 第3章の議論によりこの質点の運動は xy 平面内に限定されていることになる. そこで xy 平面内に極座標を設定する.

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta \tag{7-50}$$

このとき運動のエネルギーは

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2) \tag{7-51}$$

となるので，Lagrangian は極座標系で次のごとく与えられることになる．

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-U(r) \tag{7-52}$$

Lagrange の運動方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)=mr\dot{\theta}^2-U'(r)-m\ddot{r}=0 \tag{7-53}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=-\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0 \tag{7-54}$$

第2式は一つの保存則を表わしている．そこでこの保存量の物理的意義を調べるために角運動量を考える．

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}} \tag{7-55}$$

さて $z=0$, $\dot{z}=0$ であるから現在の問題では

$$l_x=l_y=0$$

ところで

$$l_z=m(x\dot{y}-y\dot{x})=mr^2\dot{\theta} \tag{7-56}$$

したがって (7-54) の保存則は l_z の保存則となる． この場合に他の成分は 0 であるから

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}=0 \tag{7-57}$$

したがって中心力の場合には角運動量が保存されることになる．そこで l_z の値を mh と書くことにすると

$$\dot{\theta}=\frac{h}{r^2} \tag{7-58}$$

(7-53) に代入し，r に対する運動方程式が得られる．

$$m\ddot{r}=-U'(r)+m\frac{h^2}{r^3} \tag{7-59}$$

軌道方程式を出すには t に関する微分を θ に関する微分でおき換えればよい．

$$\frac{d}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}=\frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}$$

したがって (7-59) でこのおき換えをすると

$$\frac{mh^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)=-U'(r)+\frac{mh^2}{r^3} \tag{7-60}$$

そこで

$$\frac{1}{r}=u, \qquad r^2U'(r)=mh^2f(r) \tag{7-61}$$

とおいてやると，軌道方程式は

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=f\left(\frac{1}{u}\right) \tag{7-62}$$

この式を解けば，軌道の方程式が極座標系で与えられることになる．これ以上議論するには関数 f の具体的な形が必要である．

第 8 章

運動方程式の解の家族 I

8-1 運動方程式の一般解

自由度 f の力学系の運動方程式の一般解は $2f$ 個の積分定数を含み，初期条件として f 個の変数の値，および f 個の変数の時間微分（速度）の値を指定することによって，この積分定数の値が決定される．したがって一つの解は，この $2f$ 個の積分定数によって特徴づけられる．このような解が全部知られれば，その力学系の問題は完全に解かれたといえる．しかしながらこのような完全な解，すなわち一般解を求めることは多くの場合に難しく，積分定数の特殊な値に対応する特殊解しか求められない場合が多い．

そこで一つの解が求められたときに，その解から出発して他の解を求める処法を考えてみよう．この問題は一つの解を $2f$ 次元の空間の一点に対応させた場合に，一つの点から出発して解の作る空間の部分空間に対応する解の家族 (family) を求めることに相当する．簡単な場合には，この部分空間が解の作

る全空間と一致し，一般解が求まることがあるが，これは特殊な場合に限られる．

上述の処法を見つけるためには，与えられた力学系が種々の条件を満たしていなければならないが，この要請は通常与えられた力学系の Lagrangian の性質に対する条件として表現される．ここでは第5章で取り扱った質点系に限って議論することにしよう．

8-2　空間の均一性と平行移動

慣性系を一つ選び，それに対して上述の問題を考える．我々は力学系の運動に舞台を提供する空間は一様で均一であると考えているから，運動法則は空間のどこでも同様に成り立つと考えてよい．たとえば東京で成り立つ法則は大阪でも成り立つと考えてよいであろう．すなわち，東京で発見された運動法則は，大阪で追試をしてもやはり験証しうると考えてよいであろう．このことを式で表わせば

$$\boldsymbol{r}_j=\boldsymbol{f}_j(t) \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{8-1}$$

が運動方程式（5-1）の解であれば

$$\boldsymbol{r}'_j=\boldsymbol{f}_j(t)+\boldsymbol{a} \tag{8-2}$$

もやはり同じ運動方程式の解であることを意味する．明らかに (8-1) と (8-2) とでは初期条件が異なっており，第2の解は，第1の解とは $t=0$ における質点の位置が定数ベクトル $\boldsymbol{a}$ だけ平行移動されている．上の陳述を証明するには，$\boldsymbol{r}'_j$ が $\boldsymbol{r}_j$ と同じ運動方程式を満たすことを証明すればよい．ところで $\boldsymbol{a}$ を定数ベクトルとすれば

$$\frac{d\boldsymbol{r}'_j}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}_j}{dt}, \qquad \frac{d^2\boldsymbol{r}'_j}{dt^2}=\frac{d^2\boldsymbol{r}_j}{dt^2} \tag{8-3}$$

であり，かつ2質点間の力はその距離ベクトル $\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j$ のみに依存すること，およびこの距離ベクトルは不変であること，

$$\boldsymbol{r}'_i-\boldsymbol{r}'_j=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j \tag{8-4}$$

を用いれば，$\boldsymbol{r}'_j$ も（5-1）の方程式を満たすことが導かれる．第2の解は，第1の解から

$$\boldsymbol{r}_j \to \boldsymbol{r}'_j = \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{a} \tag{8-5}$$

なる変換によって得られることになる．このような変換をもう一度導入して

$$\boldsymbol{r}'_j \to \boldsymbol{r}''_j = \boldsymbol{r}'_j + \boldsymbol{b} \tag{8-6}$$

とすれば，合成した変換

$$\boldsymbol{r}_j \to \boldsymbol{r}''_j = \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \tag{8-7}$$

は，やはり平行移動であるから，このような変換（平行移動）は群を作り，一つの解に対してこの変換群を適用することにより，お互いに物理的内容が同じの解の一族が得られることになる．

さてこの変換では運動エネルギーは (8-3) により不変であり，位置のエネルギーは (8-4) により不変であるから

$$L(\boldsymbol{r}'_j, \dot{\boldsymbol{r}}'_j) = L(\boldsymbol{r}_j, \dot{\boldsymbol{r}}_j) \tag{8-8}$$

となり，Lagrangian も不変である．上述の平行移動の群は無限小平行移動を積み重ねることにより生成されるから，(8-8) のような不変性は無限小平行移動に対して成り立っていれば有限な平行移動に対しても成り立つことになる．

$\boldsymbol{a}$ を無限小として $\boldsymbol{r}'_j$ を (8-5) により定義すると (8-8) は

$$L(\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{a}, \dot{\boldsymbol{r}}_j) = L(\boldsymbol{r}_j, \dot{\boldsymbol{r}}_j) \tag{8-9}$$

のごとく表わされる．そこで $\boldsymbol{a}$ を無限小として両辺の差をとると

$$\sum_j (\boldsymbol{a}, \nabla_j L) = 0 \tag{8-10}$$

ただし ∇_j は (7-2) で定義されたベクトル微分演算子である．

$\boldsymbol{a}$ は無限小だが，任意のベクトルであるから

$$\sum_j \nabla_j L = 0$$

あるいは成分にわけて

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial y_j} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial z_j} = 0 \tag{8-11}$$

この式を Lagrange の方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) = 0, \text{ および } y,\ z \text{ 成分の方程式}$$

と組み合わせると

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j}\right) = 0 \tag{8-12}$$

ところで $\dot{\boldsymbol{r}}$ を含んでいるのは $L=T-U$ の中の T であり，これを用いると(5-4)，(5-5) からわかるように，(8-12) 式は全系の運動量の保存則に帰着される．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P}=0 \tag{8-13}$$

すなわち，上述の平行移動により解の一族が得られるという性質と，運動量保存則とは同じルーツをもっている．

上の変換は次のように拡張できる．(8-1) が解ならば

$$\boldsymbol{r}'_j=\boldsymbol{f}_j(t)+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}t \tag{8-14}$$

もやはり解である．このとき加速度も距離も不変だからである．$\boldsymbol{v}t$ を加えることは Galilei 変換に似ているが，その意味は異なる．Galilei 変換の場合には，一つの質点の運動を異なる慣性系から見た場合の座標変換を表わすが，今度の場合には慣性系は一つしか考えていなくてその代りに二つの異なる運動を考えているのである．また速度は不変でなくて

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_j=\dot{\boldsymbol{r}}_j+\boldsymbol{v} \tag{8-15}$$

となるので，初期条件としては全質点の位置が $\boldsymbol{a}$ だけ平行移動するだけではなく，すべての質点の初速度が $\boldsymbol{v}$ だけずれることになる．また Lagrangian も位置のエネルギーは不変だが，運動のエネルギーが変化する．

$$T=\sum_j\frac{1}{2}m_j\dot{\boldsymbol{r}}_j^2\to\sum_j\frac{1}{2}m_j(\dot{\boldsymbol{r}}_j+\boldsymbol{v})^2$$

すなわち

$$T\to T+\boldsymbol{v}\boldsymbol{P}+\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2 \tag{8-16}$$

ただし M は質点系の全質量である．なおこの変換に対する不変性からは次の保存則を得ることができる．読者自ら確かめてみられたい．

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{P}t-M\boldsymbol{R})=0 \tag{8-17}$$

ただし $\boldsymbol{R}$ は重心座標である．

8-3 空間の均一性と回転

上述の例では，空間が平行移動に対して均一であるとしたが，同様にどの方向も同格で空間に特別な方向はないから，(8-1) が解ならばそれを回転して得られる運動も解となるはずである．(8-1) を成分に分解して

$$r_{ja}=f_{ja}(t) \qquad (j=1,2,\cdots,n,\ \ a=x,y,z) \tag{8-18}$$

が解であるとすると

$$r'_{ja}=\sum_b S_{ab}f_{jb}(t) \tag{8-19}$$

もまた解である．ただし S は直交行列である．距離も運動エネルギーもスカラーであるから，Lagrangian は不変で，(8-8) の関係式が成り立つ．したがって $\boldsymbol{r}_j$ に対する方程式と $\boldsymbol{r}'_j$ に対する方程式とは全く同じ形になり，$\boldsymbol{r}_j$ が解ならば $\boldsymbol{r}'_j$ も解であるということになるのである．もっと詳しくは

$$U(\boldsymbol{r}'_1,\boldsymbol{r}'_2,\cdots,\boldsymbol{r}'_n)=U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n) \tag{8-20}$$

であるからこれを単に U と書く．(8-19) は

$$r'_{ja}=\sum_b S_{ab}r_{jb} \tag{8-21}$$

なる変換を表わし，S の逆行列が S^T で与えられるから

$$r_{jb}=\sum_a r'_{ja}S_{ab} \tag{8-22}$$

と書ける．したがって

$$\begin{aligned} &m_j\frac{d^2r'_{ja}}{dt^2}+\frac{\partial}{\partial r'_{ja}}U \\ &=\sum_b S_{ab}\left(m_j\frac{d^2r_{jb}}{dt^2}\right)+\sum_b\frac{\partial r_{jb}}{\partial r'_{ja}}\cdot\frac{\partial}{\partial r_{jb}}U \\ &=\sum_b S_{ab}\left[m_j\frac{d^2r_{jb}}{dt^2}+\frac{\partial}{\partial r_{jb}}U\right] \end{aligned} \tag{8-23}$$

ただし上の変形では (8-22) を用いている．したがって

$$m_j\frac{d^2r_{jb}}{dt^2}=-\frac{\partial}{\partial r_{jb}}U \quad \text{ならば} \quad m_j\frac{d^2r'_{ja}}{dt^2}=-\frac{\partial}{\partial r'_{ja}}U \tag{8-24}$$

が成り立ち，(8-19) が解であることがわかる．

さて (8-8) を無限小回転に対して書くことにする．まず無限小回転は第5章で述べたように

$$\boldsymbol{r}_j \to \boldsymbol{r}'_j = \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{o} \times \boldsymbol{r}_j \tag{8-25}$$

のように表わされる．ここに $\boldsymbol{o}$ は無限小の回転ベクトルである．そこで

$$\delta \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}'_j - \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{o} \times \boldsymbol{r}_j \tag{8-26}$$

と書くと，(8-8) に対応して

$$L(\boldsymbol{r}_j + \delta \boldsymbol{r}_j, \dot{\boldsymbol{r}}_j + \delta \dot{\boldsymbol{r}}_j) = L(\boldsymbol{r}_j, \dot{\boldsymbol{r}}_j) \tag{8-27}$$

再び両者の差をとり，δ につき一次の項のみを残す．このときに次のような記号を用いる．

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_j}, \frac{\partial L}{\partial y_j}, \frac{\partial L}{\partial z_j} \right)$$

ただし $\dot{\boldsymbol{r}}_j$ に関する微分も同様にして定義されるとする．

$$\begin{aligned}
&\sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j} \delta \boldsymbol{r}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_j} \delta \dot{\boldsymbol{r}}_j \right) \\
&= \sum_j \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j}, \boldsymbol{o} \times \boldsymbol{r}_j \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_j}, \boldsymbol{o} \times \dot{\boldsymbol{r}}_j \right) \right] \\
&= \left(\boldsymbol{o}, \sum_j \left(\boldsymbol{r}_j \times \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j} + \dot{\boldsymbol{r}}_j \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_j} \right) \right) = 0
\end{aligned} \tag{8-28}$$

ただし上式の変形には次の公式を用いた．

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A})$$

$\boldsymbol{o}$ は無限小だが任意のベクトルであるから

$$\sum_j \left(\boldsymbol{r}_j \times \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j} + \dot{\boldsymbol{r}}_j \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_j} \right) = 0 \tag{8-29}$$

さて $\boldsymbol{r}_j$ が運動方程式の解ならば

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_j} \right)$$

であり，これを (8-29) に代入し，かつ次の公式を使う．

$$\frac{d}{dt} (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

そうすると (8-29) は次の形の保存則になる．

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j \boldsymbol{r}_j\times\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_j}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_j \boldsymbol{l}_j\right)=\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}=0 \tag{8-30}$$

すなわち，上述の回転により解の一族が得られる性質と角運動量保存則とは同根である．このような，Lagrangian の不変性と保在則との間に存する対応関係を Noether の定理と呼ぶ．

8-4　時間の均一性

空間の均一性を仮定したのと同様に，時間に対しても均一性を仮定する．ある時点で成り立つ運動法則は，そのときから百万年経っても成り立つと仮定しよう．換言すれば宇宙の時計には特別な時刻はないということになる．さて (8-1) が解であれば

$$\boldsymbol{r}'_j=\boldsymbol{f}_j(t+\tau) \tag{8-31}$$

もまた解である．力が時刻に陽によらないとすると，運動方程式において τ を定数としたときに

$$t'=t+\tau \tag{8-32}$$

とおくと

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_j}{dt^2}=\frac{d^2\boldsymbol{r}_j}{dt'^2} \tag{8-33}$$

であるから，t を t' でおき換えても運動方程式の形が変わらないからである．さて τ が無限小としたときに，この変換は次の形に表わされる．

$$\boldsymbol{r}_j\to\boldsymbol{r}'_j=\boldsymbol{r}_j+\tau\dot{\boldsymbol{r}}_j,\qquad \dot{\boldsymbol{r}}_j\to\dot{\boldsymbol{r}}'_j=\dot{\boldsymbol{r}}_j+\tau\ddot{\boldsymbol{r}}_j \tag{8-34}$$

さてこのときには，直交座標のみでなく任意の一般座標に対してこの変換は次の形に表わされる．

$$q_j\to q'_j=q_j+\tau\dot{q}_j \tag{8-35}$$

もし L が t を陽に含まなければ

$$L(q'_j,\dot{q}'_j)=L(q_j,\dot{q}_j)+\tau\frac{d}{dt}L(q_j,\dot{q}_j)$$

さて左辺を τ について展開して一次まで残し，両辺を比べると

$$\tau\sum_j\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right)=\tau\frac{d}{dt}L$$

この式を変形すると

$$\sum_j\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right)\dot{q}_j+\sum_j\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)$$
$$=\frac{d}{dt}L$$

したがって q_j が運動方程式の解であれば

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L\right)=0 \tag{8-36}$$

さて L の中で $\dot{q}$ を含むのは運動エネルギー T のみであり，これを $\dot{q}$ について二次形式と仮定する．すなわち

$$T=\sum_{i,j}\frac{1}{2}g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \qquad (g_{ij}=g_{ji}) \tag{8-37}$$

とすると

$$\sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=\sum_j\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j$$
$$=\sum_{i,j}\frac{1}{2}(g_{ij}+g_{ji})\dot{q}_i\dot{q}_j$$
$$=2T \tag{8-38}$$

したがって

$$\sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=2T-(T-U)=T+U \tag{8-39}$$

すなわち，(8-36) は力学的エネルギーの保存則を意味する．このように時間の均一性はエネルギー保存則と密接な関係がある．

以上のような考察は通常変分原理に基づいて行われるが，ここでは変分原理を経由しない方法を提示した．しかしながら大切なことはすべての運動方程式が，ただ一つの Lagrange 関数によって統制されているということである．

第 9 章

重力および電磁的な力

9-1 相互作用の分類

いままで粒子間に働く力はすべて現象論的に与えられたものとして取り扱ってきた．しかしながらすべての物質が原子・分子からなるとすれば，その間の力はすべてもっと特定された力に帰着せしめることができる．その力の源として，ミクロの世界まで行くと次の 4 種類を考えることができる．

1. 強い相互作用，2. 電磁的相互作用，3. 弱い相互作用，4. 重力．

まずこれらの力について説明しよう．強い相互作用とは，陽子・中性子等を結びつけて原子核を形成するのに関与している種類の力で最も強い相互作用である．第 4 章で述べたように核反応を生じさせるエネルギーは MeV のオーダーであり，化学反応の閾値のオーダー eV と比べるとはるかに大きいことからもその強さの程度がわかるであろう．しかしながらこの力は極めて短距離でしか働かない．すなわち，大体 10^{-15} m くらいの距離の間でしか働かないので，

マクロの世界を扱う古典力学では，原子核を一つの質点または剛体として取り扱う限り，この力は表面には出て来ない．このような理由で，この種の力が古典力学で考えられるべき理由はほとんどないといってよい．

それに反して，原子・分子の力学で重要なのは電磁的相互作用であり，それは Coulomb の力により代表される．原子を構成する原子核と電子，および電子相互間の力はほとんど Coulomb の力によって記述される．このような原子・分子の集合であるマクロの物体の諸性質もほとんどこの力によって導き出されるといってよい．更に大切なことは，強い相互作用と違って，電磁的な力は遠距離まで到達できることであり，そのためにマクロの現象でもこの力が認識されるのである．次の弱い相互作用は電磁的相互作用よりもはるかに弱く，かつ極めて短距離にしか働かないので古典力学の対象にはならない．この力が認められるのは放射性原子核の崩壊のようなミクロの現象のみである．したがって以上の3種類の力で古典力学の対象となりうるのは電磁的な力のみである．さて最後の重力あるいは万有引力は，実は弱い相互作用よりもはるかに弱くてミクロの世界ではほとんど問題にならない．たとえば2個の陽子をとり，その間の重力と Coulomb 力とを比べると，前者は後者のわずか 10^{-36} 倍であり，通常は全く無視される．ところが重力はマクロの世界では重要になる．その理由は，まず電磁的な力と同様に遠距離でも作用するということと，Coulomb 力の場合には電荷同士の符号によって引力になったり斥力になったりして，電気的中性な物質間では引力と斥力とがお互いにほとんど打ち消し合ってしまうのに対して，重力は常に引力であり，お互いに打ち消し合うことはなく，常に加算的である．しかも力は二つの物体の質量の積に比例するので，マクロの物体に対しては極めて強くなるのである．このことは地球が太陽の周りを回転するという公転運動を考えたときに重力のみを考慮し，両者間の Coulomb 力は全く考える必要がないということによって象徴されるであろう．

結論として，マクロの物体間の力で重要なのは，重力と電磁力とである．マクロの世界で現象論的に現われる力，たとえば弾性力とか摩擦力とかは，電磁的な力が，多体効果とか量子効果等の衣をまとって出現したものである．

9-2 電磁場と重力場

力学の方程式に出てくる電磁気的な力を導出するのは電磁気学の課題であって力学の問題ではないのでここではその結果のみを用いることにする．荷電粒子が存在すれば，その粒子の周りに電場を生ずる．電場とは，時間空間のある点 P(x, y, z, t) に電荷 q という test charge† をもってきたときにその電荷に働く力 $\boldsymbol{F}_q$ と次の関係で結ばれているベクトル $\boldsymbol{E}$ のことである．

$$\boldsymbol{F}_q(x, y, z, t) = q\boldsymbol{E}(x, y, z, t) \tag{9-1}$$

ここで大切なことは，色々な電荷 $q, q', \cdots$ に対して

$$\frac{\boldsymbol{F}_q}{q} = \frac{\boldsymbol{F}_{q'}}{q'} = \cdots \tag{9-2}$$

は test charge によらないベクトルとなり，時空，すなわち時間空間の一つの性質であるといえることである．このようなベクトルが電場であり，その強さや方向が一つの慣性系を考えたときに時空座標の関数になる．荷電粒子が静止しておらずに並進運動あるいは回転運動をしていれば，電場の外に磁場を生ずる．荷電粒子が与えられた運動をしているときにどのような電場や磁場を生じるかは，電磁気学の問題であるのでここでは論じない．

同様にして質量，あるいは相対論的にもっと一般的にいえば，エネルギーが空間のある領域に存在すれば，その周囲に重力場 $\boldsymbol{G}$ を生じる．$\boldsymbol{G}$ も時空座標の関数であり，重力場の存在する点 P(x, y, z, t) に質量 m の test body をもってくると

$$\boldsymbol{F}_m(x, y, z, t) = m\boldsymbol{G}(x, y, z, t) \tag{9-3}$$

なる形の力を生じる．この場合にもどんな質量 $m, m', \cdots$ をもってきても，それらに作用する力 $\boldsymbol{F}_m, \boldsymbol{F}_{m'}, \cdots$ に対して

$$\frac{\boldsymbol{F}_m}{m} = \frac{\boldsymbol{F}_{m'}}{m'} = \cdots \tag{9-4}$$

は質量によらず，その時空点に特有な性質であると考えられる．一般に test

---

† 荷電粒子に対してどのような力が働くかを調べるために試験的に用いる電荷で，周囲を乱さないようにできるだけ小さい電荷を用いる．

body をもってきたときに，その粒子を特徴づける属性であるパラメター，すなわち電荷，質量，その他に比例した力が作用するときに，我々は一つ一つの属性に対応する場を考えることができる．この場がどのような源により生じ，時空のいかなる関数になるかということを記述する方程式を場の方程式と呼び，電磁場や重力場等の性質を研究する分野を場の理論と呼ぶ．以下ではその結果を利用することにしよう．

9-3　静的ポテンシャル

2個の荷電粒子が光速度よりずっと遅い運動をしているときに，この2粒子間に働く力は次のポテンシャルから導き出される．

$$V=\frac{q_1q_2}{r} \tag{9-5}$$

ここに q_1 と q_2 とはそれぞれの電荷であり，r は2点間の距離である．このポテンシャルを Coulomb ポテンシャルと呼ぶ．さて r は

$$r^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$

で与えられるから，(7-46) にならって

$$\frac{\partial r}{\partial x_1}=\frac{x_1-x_2}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y_1}=\frac{y_1-y_2}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z_1}=\frac{z_1-z_2}{r}$$

ゆえに合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)&=\frac{d}{dr}\left(\frac{q_1q_2}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x_1}\\&=-\frac{q_1q_2}{r^2}\cdot\frac{x_1-x_2}{r}\end{aligned}$$

したがって第1の粒子に働く力は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(2\to 1)&=-\nabla_1 V\\&=\frac{q_1q_2}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{r}\end{aligned} \tag{9-6}$$

したがって，q_1 を test charge と考えれば，q_1 のある点における q_2 の作り出す電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1)=\frac{q_2}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{r} \tag{9-7}$$

で与えられることになる．ところで $(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)/r$ は2から1への矢印の方向への単位ベクトルであるから，(9-6) の絶対値をとると

$$|\boldsymbol{F}(2\to 1)|=\frac{|q_1q_2|}{r^2} \tag{9-8}$$

となり，力は距離の自乗に逆比例する．これを逆自乗の法則と呼ぶ．(9-6) の力は $q_1q_2>0$ のときには斥力であり，$q_1q_2<0$ ならば引力である．

次に重力を考えると，質量が m_1, m_2 で与えられるような2粒子間の力は次のポテンシャルから導き出される．

$$U=-G\frac{m_1m_2}{r} \tag{9-9}$$

ここに G は万有引力定数と呼ばれる普遍定数である．

$$G=6.673\times10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}} \tag{9-10}$$

(9-9) を重力ポテンシャル，あるいは Newton ポテンシャルと呼ぶ．m_1, m_2 は常に正であるから重力は常に引力であり，万有引力と呼ばれる．さて粒子1に対して働く力は，(9-6) と同様に次式で与えられる．

$$\boldsymbol{F}(2\to 1)=-G\frac{m_1m_2}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{r} \tag{9-11}$$

したがって1における粒子2による重力場は

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_1)=-G\frac{m_2}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{r} \tag{9-12}$$

で与えられる．さて地表における重力場は地球により作られるが，地球は点でない．しかし地球を均質の球とみなしたときに，その球の外側での重力場は地球の全質量が地球の中心に集中している場合に作られる重力場と同じであることが証明される．したがって地球の質量を M，半径を R とすると，地表での重力による加速度 g は

$$g=G\frac{M}{R^2} \tag{9-13}$$

で与えられることになる．

9-4　Kepler の法則

次に中心力の場の下での2体問題を考えよう．

$$T=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}_1^2+\frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{r}}_2^2,\qquad U=U(r) \tag{9-14}$$

質点系の一般論に従って重心運動と相対運動とを分離しよう．

$$\boldsymbol{R}=\frac{m\boldsymbol{r}_1+M\boldsymbol{r}_2}{m+M},\qquad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2 \tag{9-15}$$

とおけば

$$T=\frac{1}{2}(m+M)\dot{\boldsymbol{R}}^2+\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 \tag{9-16}$$

のように，運動エネルギーは重心の運動エネルギーと相対運動に対する運動エネルギーとに分離される．μ は慣算質量と呼ばれ，次式で与えられる．

$$\mu=\frac{Mm}{M+m} \tag{9-17}$$

もしも，$M\gg m$ が成り立てば

$$\mu\approx m \tag{9-18}$$

m が地球，M が太陽，あるいは m が電子，M が陽子に対応するような惑星運動とか水素原子の系を考えるときには上の条件が満たされている．このようなときに Lagrangian は次のように分離される．

$$L=L_1+L_2 \tag{9-19}$$

ここに

$$L_1=\frac{1}{2}(m+M)\dot{\boldsymbol{R}}^2,\qquad L_2=\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2-U(r) \tag{9-20}$$

L_1 から出る Lagrange の方程式は重心が等速直線運動をすることを示し，L_2 から出る Lagrange の方程式は系に特有な運動を決定することになる．この第2の Lagrange 方程式は，第7章の第4節で議論されたものと同じになるので，ポテンシャルとして Coulomb あるいは Newton のポテンシャルを代入することにしよう．

水素原子の場合に電子の電荷を $-e$, 陽子の電荷を e とすると Coulomb ポテンシャルは

$$U=-\frac{e^2}{r} \tag{9-21}$$

また地球と太陽の間の Newton ポテンシャルは

$$U=-G\frac{mM}{r} \tag{9-22}$$

となる．以下では慣算質量 μ は m に等しいとおくことにしよう．既に第7章で示したごとくこの相対運動は平面運動である．また上述の例はいずれも引力の場合である．そこで数学的構造は全く同じであるから後者について議論することにしよう．軌道方程式は (7-62) であり，(7-61) は

$$r^2U'(r)=GmM=mh^2f(r) \tag{9-23}$$

すなわち

$$f(r)=\frac{GM}{h^2} \tag{9-24}$$

したがって方程式 (7-62) は

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2} \tag{9-25}$$

という簡単な微分方程式となる．この右辺を

$$\frac{GM}{h^2}=\frac{1}{l} \tag{9-26}$$

と書くことにする．そうすると

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(lu)+lu=1 \tag{9-27}$$

そこで

$$lu=1+F(\theta) \tag{9-28}$$

とおいてやると $F(\theta)$ の満たす式は

$$\frac{d^2}{d\theta^2}F(\theta)+F(\theta)=0 \tag{9-29}$$

となり，(3-23) で $\omega=1$ とおいた微分方程式となる．ゆえにその一般解は

$$F(\theta)=A_1\sin\theta+A_2\cos\theta \tag{9-30}$$

で与えられる．他の形では

$$F(\theta)=\varepsilon\cos(\theta-\alpha) \tag{9-31}$$

ここで極座標系をうまく選べば，$\varepsilon>0$, $\alpha=0$ とすることができる．ただし

$$A_1=-\varepsilon\sin\alpha,\qquad A_2=\varepsilon\cos\alpha \tag{9-32}$$

とおいてある．そこで $\alpha=0$ となるように $\theta=\alpha$ なる直線を新しく x 軸に選べば，軌道の方程式は

$$lu=1+\varepsilon\cos\theta$$

すなわち，

$$r=\frac{l}{1+\varepsilon\cos\theta}\qquad(\varepsilon>0) \tag{9-33}$$

これは焦点を極，すなわち原点としたときの円錐曲線の方程式である．ε は離心率と呼ばれ，$\varepsilon<1$ ならば楕円，$\varepsilon=1$ ならば放物線，$\varepsilon>1$ ならば双曲線を表わす．この中で惑星は太陽の周りを回っていて太陽から無限に離れることはない．したがって，“惑星の軌道は太陽を焦点とする楕円である”．ただしこれは太陽系の重心に固定された慣性系，近似的には太陽に固定された慣性系を用いた記述で，上の結果は Kepler の第一法則と呼ばれる．

次に地球と太陽とを結ぶ動径が Δt という短い時間に掃いてゆく面積を ΔS とする．この動径は Δt の間に $\Delta\theta$ という角だけ回転するとすると，この三角形の面積は，半径 r，中心角 $\Delta\theta$ の扇形の面積で近似できるから

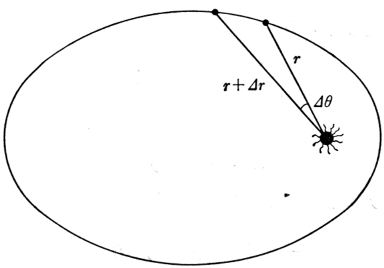


図 9-1 惑星の運動

惑星の軌道は太陽を焦点とする楕円で，その面積速度は一定である．この性質をそれぞれ Kepler の第一法則，および第二法則と呼ぶ．

$$\Delta S=\frac{1}{2}r^2\Delta\theta \tag{9-34}$$

そこで Δt で除して $\Delta t\to 0$ なる極限をとると，(7-58) より直ちに

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{1}{2}h \tag{9-35}$$

これは時間的に一定であり，面積速度一定ということを表わしている．この法則はもともと角運動量保存則に由来し，Kepler の第二法則と呼ばれる．

次にエネルギー保存則を書き下ろす．

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-G\frac{mM}{r}=E \tag{9-36}$$

ただし E は相対運動のエネルギーであり，$\mu=m$ とおいてある．(7-58) を代入すると

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2=E+\frac{GmM}{r}-\frac{mh^2}{2r^2}$$
$$=\frac{Er^2+GmMr-(1/2)mh^2}{r^2} \tag{9-37}$$

r が極大，極小のときに $\dot{r}=0$ となるから上式の右辺は次の r の値に対して 0 となる．

$$r_{\max}=\frac{l}{1-\varepsilon},\qquad r_{\min}=\frac{l}{1+\varepsilon} \tag{9-38}$$

したがって二次方程式の根と係数との関係から

$$r_{\max}+r_{\min}=-\frac{GmM}{E} \tag{9-39}$$

$$r_{\max}r_{\min}=-\frac{mh^2}{2E} \tag{9-40}$$

さてこれからすべての保存量を軌道方程式に出てくる l と ε とで表わそう．まず (9-26) より

$$h^2=GMl \tag{9-41}$$

次に (9-38) を (9-39) に代入すると

$$\frac{2l}{1-\varepsilon^2}=-\frac{GmM}{E} \tag{9-42}$$

すなわち，

$$E=-\frac{GmM}{2l}(1-\varepsilon^2) \tag{9-43}$$

このように面積速度もエネルギーも l と ε とで表わされる．さて

$$a=\frac{1}{2}(r_{\max}+r_{\min})=\frac{l}{1-\varepsilon^2} \tag{9-44}$$

を平均距離と呼ぶ．これは楕円の長半径に等しい．短半径 b は次式により与えられる（解析幾何学参照）．

$$b^2=\frac{l^2}{1-\varepsilon^2}=a^2(1-\varepsilon^2) \tag{9-45}$$

さて楕円の面積 S は次式で与えられる．

$$S=\pi ab=\pi l^{1/2}a^{3/2} \tag{9-46}$$

また惑星が太陽の周りを一周するのに要する周期 T は

$$\begin{aligned} T&=S\Big/\frac{dS}{dt}=\frac{2S}{h} \\ &=2\pi\sqrt{\frac{la^3}{GMl}} \\ &=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{3/2} \end{aligned} \tag{9-47}$$

すなわち，“惑星が太陽の周りを一周するのに要する周期の自乗は，長半径の3乗に比例する．”という Kepler の第三法則が得られる．

方程式 (9-43) は楕円軌道に対して出したが，$\varepsilon\geqq 1$ でも成り立つ．これから $E<0$ ならば楕円，$E=0$ ならば放物線，$E>0$ ならば双曲線という結果を得る．特に注意すべきことは，楕円および放物線軌道は引力のときにしか存在しないことである．斥力だと双曲線軌道しかなく，しかも力の中心は引力のときと比べて他の焦点となる．

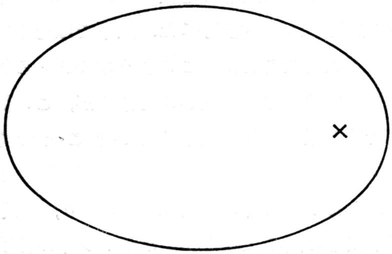


図 9-2 a 逆自乗法則下での楕円軌道

力が逆自乗の法則に従うときの楕円軌道は，力が引力のときにのみ存在する．引力の中心は楕円の焦点であり，×印で示されている．このとき $E<0$.

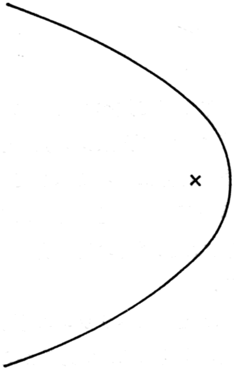


図 9-2 b 逆自乗法則下での放物線軌道

力が逆自乗の法則に従うときの放物線軌道は，力が引力のときだけ存在する．引力の中心は放物線の焦点であり，×印で示されている．このとき $E=0$.

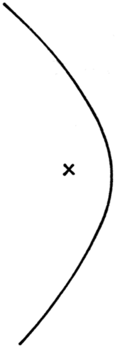


図 9-2 c 逆自乗法則下での双曲線軌道 引力の場合

力が逆自乗法則に従うときの双曲線軌道が示されている．引力の場合に，力の中心は図に示されている双曲線の焦点であり，×印がついている．このとき $E>0$.

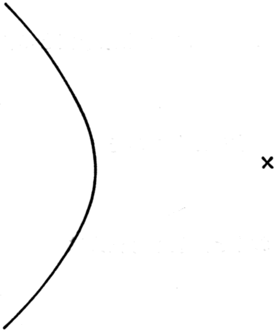


図 9-2 d 逆自乗法則下での双曲線軌道 斥力の場合

力が逆自乗法則に従うときの双曲線軌道が示されている．斥力の場合に，力の中心は図に示されている双曲線の焦点であり，×印がついている．このとき $E>0$.

9-5 Rutherford 散乱

第4章で述べたように Rutherford は原子核の大きさを調べるために，原子核に α 粒子をぶつけ，それがいかに散乱されるかを調べた．以下ではその原理を計算によって示してみよう．ここで大切なことは，このようなミクロの世界の現象は，量子力学によって計算されなければならないのであるが，この問題に限ればその答は古典力学による計算結果と偶然一致するということである．

α 粒子はヘリウムの原子核であり，したがってその電荷は $2e$ であり，原子核の電荷は Ze であるから，α と原子核との間の Coulomb ポテンシャルは次式で与えられる．

$$U=\frac{2Ze^2}{r} \tag{9-48}$$

太陽系の例と違ってこれは斥力となる．このポテンシャルを (7-61) に代入すると

$$r^2U'(r)=-2Ze^2=\mu h^2 f(r) \tag{9-49}$$

ただし μ は α と原子核との慣算質量である．したがって

$$f(r)=-\frac{2Ze^2}{\mu h^2} \tag{9-50}$$

この右辺は負なので

$$-\frac{2Ze^2}{\mu h^2}=-\frac{1}{l} \tag{9-51}$$

とおくと，軌道方程式は

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{1}{l} \tag{9-52}$$

この解は前例にならって適当な極座標を選ぶと

$$lu=-1+\varepsilon\cos\theta$$

すなわち，

$$r=\frac{l}{-1+\varepsilon\cos\theta} \tag{9-53}$$

r はある範囲内の θ に対しては正でなければならぬから，ε を正にとると

$$\varepsilon>1 \tag{9-54}$$

(9-53) は双曲線の一分枝を表わす．そのことを調べるために (9-53) を直交座標で表わしてみる．(9-53) を変形して

$$r=\varepsilon x-l \tag{9-55}$$

この式を自乗すると

$$r^2=x^2+y^2=(\varepsilon x-l)^2 \tag{9-56}$$

$\varepsilon>1$ ならば，これは確かに双曲線を表わす．(9-55) から (9-56) に移るときに，(9-53) 以外に

$$r=-(\varepsilon x-l) \tag{9-57}$$

が入った．これを極座標で表わすと

$$r=\frac{l}{1+\varepsilon\cos\theta} \tag{9-58}$$

となり，引力のときの双曲線の分枝となる．したがって斥力のときの (9-53) は双曲線のもう一つの分枝を表わしている．この関係は図 9-3 に示されている．そこで斥力の分枝についてもう少し詳しく調べる．この分枝の存在範囲は

$$\cos\theta>\frac{1}{\varepsilon} \tag{9-59}$$

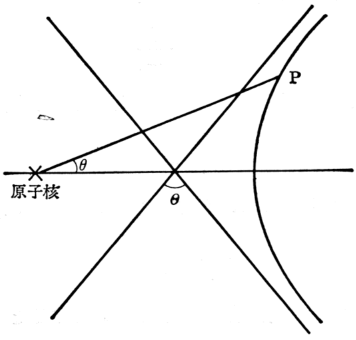


図 9-3 Rutherford 散乱

図に斥力のときの双曲線軌道と焦点となる原子核の位置が示してある．Θ は散乱角を表わす．

という条件で制限されている．そこで

$$\cos\theta_0=\frac{1}{\varepsilon} \tag{9-60}$$

とおけば，θ の範囲は

$$\theta_0>\theta>-\theta_0 \tag{9-61}$$

となり，このときの散乱角 Θ は

$$\Theta=\pi-2\theta_0 \tag{9-62}$$

で与えられることになる．

前例と同様に種々の量を軌道のパラメター l と ε とで表わしてみる．まず (9-51) を書き直せば，面積速度に対して

$$h^2=\frac{2Ze^2l}{\mu} \tag{9-63}$$

次にエネルギー保存則は

$$\frac{\mu}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{2Ze^2}{r}=E>0 \tag{9-64}$$

さて $\dot{\theta}=h/r^2$ を代入すると

$$\frac{\mu}{2}\dot{r}^2=E-\frac{2Ze^2}{r}-\frac{\mu h^2}{2r^2} \tag{9-65}$$

この式は r が極小値 $r_{\min}$ のときに消える．ただし

$$r_{\min}=\frac{l}{\varepsilon-1} \tag{9-66}$$

したがって (9-66) を (9-65) に代入して消えるとすると，

$$E=\frac{Ze^2}{l}(\varepsilon^2-1) \tag{9-67}$$

これは前例の (9-43) に対応する．さて離心率 ε は (9-60)，(9-62) により

$$\varepsilon=\frac{1}{\sin(\Theta/2)} \tag{9-68}$$

次に非常に遠方での α の相対速度の絶対値を v とすると

$$E=\frac{1}{2}\mu v^2 \tag{9-69}$$

(9-67) と (9-69) とを比較すると

$$l=\frac{2Ze^2}{\mu v^2}\cot^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) \tag{9-70}$$

次に双曲線の漸近線の方程式を考える．極から b の距離にあり，x 軸と θ_0 なる角をなす直線の方程式は

$$r=\frac{b}{\sin(\theta_0-\theta)} \tag{9-71}$$

さて

$$\lim_{\theta\to\theta_0}\left[\frac{b}{\sin(\theta_0-\theta)}-\frac{l}{-1+\varepsilon\cos\theta}\right]=\text{有限} \tag{9-72}$$

とおくと b が定まる．ただし $\varepsilon\cos\theta_0=1$ を用いる．すなわち，

$$b\tan\theta_0=l,\ \text{あるいは}\quad b=l\tan\frac{\Theta}{2} \tag{9-73}$$

そこで (9-73) と (9-70) とを組み合わせて

$$b=\frac{2Ze^2}{\mu v^2}\cot\frac{\Theta}{2} \tag{9-74}$$

原子核と α 粒子の漸近軌道との距離 b を衝突径数と呼ぶ．

この式は原子核の半径を r_0 としたときに b が r_0 より大きい所で成り立つ．そこで (9-74) からのずれがどんな b の値に対して始まるかがわかれば r_0 のオーダーが知れるはずである．

9-6　散乱断面積

上に得られた Coulomb 散乱のときの衝突径数と散乱角との間の関係式を実験でテストするにはどうしたらよいであろうか？ (9-74) によると b が小さいほど散乱角 Θ は大きくなる．そこで最大の散乱角を調べれば原子核の大きさがわかる．原子核の内部ではポテンシャルは Coulomb 型からずれるのでそれ以上大きい角の散乱は起こり難いのである．実際 Rutherford はこのような方法で，第 4 章に述べたように原子核の大きさを決めたのである．ここでは (9-74) のような関係式を実験的に調べる方法について述べる．

いま一様な密度の粒子の流れを考える．これらの粒子は速度 $\boldsymbol{v}$ で同じ方向に進んでいるとする．このときに，粒子の流れ (flux) F を，$\boldsymbol{v}$ に垂直な平面

の単位面積を単位時間に横切る粒子の数として定義する．したがってこの粒子線の密度を ρ とすると，F は

$$F=\rho v \tag{9-75}$$

で与えられる．このとき F の次元は

$$[F]=\mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^{-1} \tag{9-76}$$

で与えられる．いま $\boldsymbol{v}$ の方向を z 軸に選び，標的の位置を原点として極座標系を導入し，単位の粒子の流れに対して，単位時間当り (θ,φ) 方向の微分立体角 $d\Omega$ の方向に散乱される粒子の数を

$$\sigma(\theta,\varphi)d\Omega \tag{9-77}$$

と書いたときに，$\sigma(\theta,\varphi)$ を微分断面積と呼ぶ．σ の次元は粒子の流れ当り $(\mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^{-1})^{-1}$，単位時間当り (T^{-1}) の個数であるから

$$[\sigma]=\mathrm{L}^2 \tag{9-78}$$

となり，面積の次元となる．また微分断面積を立体角について積分したものを全散乱断面積と呼ぶ．

$$\sigma=\int\sigma(\theta,\varphi)d\Omega \tag{9-79}$$

さて衝突径数 b と散乱角 θ との関係がわかっていれば直ちに $\sigma(\theta,\varphi)$ を出すことができる．b と $b+db$ との間に入る粒子の散乱角が θ と $\theta+d\theta$ との間

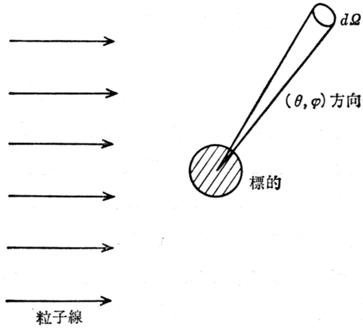


図 9-4　散乱断面積
本文を見よ．

にあれば

$$\sigma(\theta,\varphi)d\Omega = bdbd\varphi \tag{9-80}$$

ただし

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi \tag{9-81}$$

したがって $\sigma(\theta,\varphi)$ が φ によらなければ，(9-80) を φ について積分してやれば

$$2\pi\sigma(\theta)\sin\theta d\theta = 2\pi bdb \tag{9-82}$$

すなわち，

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| \tag{9-83}$$

そこで (9-74) を代入すれば，(9-83) から Coulomb 散乱に対する断面積を得る．上では (9-74) の Θ を θ と書いてある．(9-74) の b を θ で微分すると，Coulomb 力により α 粒子が原子核により散乱される場合に，重心系での微分断面積は

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{Ze^2}{\mu v^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}} \tag{9-84}$$

これを Rutherford の公式と呼ぶ．

上述の散乱断面積の概念は古典力学のみならず，量子力学でも大いに用いられる．(9-84) の公式は幸いにして偶然にも，量子力学による結果と一致している．

9-7 Lorentz の力

いままで荷電粒子に対する電場の作用について議論したが，磁場の作用も重要である．そこで今度は磁場の作用について調べることにしよう．電場や磁場がいかにして生成されるかは電磁気学に譲り，与えられた電磁場の下で，荷電粒子がいかなる力を受けるかを考える．また我々の対象は質点系であり，真空中での電磁場を考えるので，電磁気学に現われる $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ とを区別せずに，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とのみを用いる．また $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とは同じ次元であるとす

る.

電磁気学で，電流は磁場より力を受けることを知っているが，その力は

$$\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{H} \tag{9-85}$$

に比例する．$\boldsymbol{J}$ は電流を表わすが，これは荷電粒子の運動により生ずるから，$\boldsymbol{J}$ は荷電粒子の電荷 q とその速度 $\boldsymbol{v}$ および密度に比例する．そこで適当な単位で磁場が荷電粒子に及ぼす力を

$$\boldsymbol{F}=\frac{q}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} \tag{9-86}$$

と書くことができる．c は光速で，次元を合わすためにつけてあり，$\boldsymbol{v}$ は荷電粒子の速度である．$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とは同じ次元をもつことになる．この力を Lorentz の力と呼ぶ.

電場と磁場とが共存するときには (9-1) と (9-86) とを加えて

$$\boldsymbol{F}=q\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right) \tag{9-87}$$

が荷電粒子に働く力である．磁場の作用の最も著しい特徴は，力が速度によることであり，いままでになかった種類の力である.

例として一様な磁場 $\boldsymbol{H}$ の中での荷電粒子の運動を考えてみよう．磁場の方向を z 軸に選び，

$$\boldsymbol{H}=(0,0,H) \tag{9-88}$$

としたときの運動方程式は

$$\begin{aligned}m\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{q}{c}v_yH\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=-\frac{q}{c}v_xH\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=0\end{aligned} \tag{9-89}$$

これからわかることは，荷電粒子は z 方向，すなわち磁場方向へは一定な速さで進んでゆくということである．この問題では，座標よりも速度を変数に選んだ方が便利であるので，(9-89) を次のように書き換える.

$$m\frac{dv_x}{dt}=\frac{q}{c}v_yH$$

$$m\frac{dv_y}{dt}=-\frac{q}{c}v_xH \tag{9-90}$$

$$m\frac{dv_z}{dt}=0$$

最後の式から

$$v_z=v_{0z},\ \text{一定} \tag{9-91}$$

ただし v_{0z} は初速度の z 成分である．さていま

$$\omega=\frac{qH}{mc} \tag{9-92}$$

とおけば，初めの 2 式は

$$\dot{v}_x=\omega v_y, \qquad \dot{v}_y=-\omega v_x \tag{9-93}$$

と書ける．これから

$$\ddot{v}_x=\omega\dot{v}_y=-\omega^2 v_x \tag{9-94}$$

となり，(3-23) と同形の方程式となる．その解は (3-26) で与えられるが，変形して次のように書くことにしよう．

$$v_x=v_0\sin(\omega t+\alpha) \tag{9-95}$$

これから

$$v_y=\frac{\dot{v}_x}{\omega}=v_0\cos(\omega t+\alpha) \tag{9-96}$$

この式を時間について積分すれば

$$x=x_0-\frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t+\alpha) \tag{9-97}$$

$$y=y_0+\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t+\alpha) \tag{9-98}$$

すなわち，

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \tag{9-99}$$

$$R=\frac{v_0}{\omega} \tag{9-100}$$

となり，xy 平面上への射影は，角速度 ω の円運動をする．また (9-91) から

$$z=z_0+v_{0z}t \tag{9-101}$$

そこで (9-97)，(9-98)，(9-101) を組み合わせると，この軌道は空間曲線で

ある螺線 (helix) となる．平面内におさまらない軌道が出て来たのは初めてであり，Lorentz 力の特異性を示している．いま xy 平面内の運動量を p_0 とすると

$$p_0 = mv_0$$

であり，(9-100) を (9-92) と組み合わせると

$$R = \frac{cp_0}{qH} \tag{9-102}$$

これから半径 R を測定すれば，q と H とがわかっているときに運動量の xy 平面内での成分 p_0 が知られることになる．入射粒子に垂直な方向に磁場をかけておけば $v_{0z}=0$ であるから，R を測定することにより運動量の絶対値が知られることになる．

さて一様な磁場中の運動を Lagrangian から出せるかどうかは興味のある問題である．答は肯定的であり，次のごとく与えられる．」

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{q}{2c} (\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{H}) \tag{9-103}$$

すなわち第8章の記号で

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{q}{2c} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{q}{2c} \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{H}$$

ただし次の公式を用いている．

$$(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{H}) = (\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{r})$$

したがって Lagrange の方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = m\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{q}{c} \boldsymbol{H} \times \dot{\boldsymbol{r}} \tag{9-104}$$

あるいは

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{q}{c} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}$$

この方程式から運動エネルギーの保存則が得られる．]

$$T = \frac{1}{2} m\dot{\boldsymbol{r}}^2$$

とすると

$$\frac{d}{dt}T=m(\ddot{\boldsymbol{r}},\dot{\boldsymbol{r}})=\frac{q}{c}m(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{H},\dot{\boldsymbol{r}})=0 \tag{9-105}$$

これがこの場合のエネルギー保存則である．Lorentz の力は仕事をしないということは大きな特徴であり，ポテンシャルから導き出せる力ではないことを示している．

また (9-103) の第 2 項は次のように書けることに注意しておこう．

$$\frac{q}{2mc}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=\frac{q}{2mc}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{l}) \tag{9-106}$$

この場合に球対称性は失われるので角運動量は一般に保存しなくなるが，$\boldsymbol{H}$ の方向の周りの回転に対する軸対称性が残っているので，角運動量の $\boldsymbol{H}$ の方向の成分は保存される．すなわち (9-97)，(9-98) の (x_0, y_0) を通る z 軸を選び[†]

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{9-107}$$

の時間微分をとると

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}&=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{p}}\\&=\frac{q}{c}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})\end{aligned} \tag{9-108}$$

ここで次の公式を用いる．

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

したがって (9-108) は

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}=\frac{q}{c}((\boldsymbol{r},\boldsymbol{H})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})\boldsymbol{H}) \tag{9-109}$$

そこでいま (9-88) を用いるとこの座標系では $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})=zv_z$ であることから

$$\frac{dl_z}{dt}=\frac{q}{c}(zHv_z-zv_zH)=0 \tag{9-110}$$

となり，角運動量の z 成分は保存される．このときに大切なことは z 軸の選び方である．正しく z 軸を選ばなければ，z 成分といえども保存されなくなる．このように磁場があると球対称性が破れ，軸対称性のみが残る．

† (x_0, y_0, z_0) からの距離ベクトルを $\boldsymbol{r}$ と呼ぶことにする．

9-8 Larmor の定理

荷電粒子が保存力の場にあり，そこへ一様な磁場がかけられたとすると，この系の Lagrangian は

$$L=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2+\frac{q}{2c}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})-V(\boldsymbol{r}) \tag{9-111}$$

この系は軸対称であるから† $\boldsymbol{H}$ の方向に z 軸をとり，円筒座標系を設定する．

$$x=\rho\cos\varphi, \qquad y=\rho\sin\varphi, \qquad z=z \tag{9-112}$$

すると (9-111) の Lagrangian はこの座標系では

$$L=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)+\frac{qH}{2c}\rho^2\dot{\varphi}-V \tag{9-113}$$

そこで一原子分子を考え，原子核を固定して原点に選び，電子に対して $q=-e$ とおいてやると電子系に対して

$$L=\sum_{j=1}^{Z}\frac{m}{2}(\dot{z}_j^2+\dot{\rho}_j^2+\rho_j^2\dot{\varphi}_j^2)-\frac{eH}{2c}\sum_{j=1}^{Z}\rho_j^2\dot{\varphi}_j-V \tag{9-114}$$

ここに V は電子と原子核，電子同士の Coulomb ポテンシャルの和であり，もちろん球対称である††．磁場のために球対称性は破れるが，z 軸の周りの軸対称性は保たれている．そこで

$$V(z_j,\rho_j,\varphi_j+\varDelta)=V(z_j,\rho_j,\varphi_j) \tag{9-115}$$

すなわち，すべての電子の φ 座標を共通の角 $\varDelta$ だけずらしてもポテンシャルは変わらない．まず磁場が弱いとして，H の一次の項のみを残し，H の二次の項を無視する近似では

$$L=\sum_{j=1}^{Z}\frac{m}{2}\left[\dot{z}_j^2+\dot{\rho}_j^2+\rho_j^2\left(\dot{\varphi}_j-\frac{eH}{2mc}\right)^2\right]$$
$$-V\left(z_j,\rho_j,\varphi_j-\frac{eH}{2mc}t\right)+O(H^2) \tag{9-116}$$

---

† 保存力は中心力であるとする．

†† (8-20) 式の意味で任意の回転に対して V が不変であるということ．

ただし (9-115) を使っており，$O(H^2)$ は H について二次のオーダーの項を表わす．そこで

$$z_j = z_j^{(0)}, \qquad \rho_j = \rho_j^{(0)}, \qquad \varphi_j^{(0)} = \varphi_j - \frac{eH}{2mc}t \tag{9-117}$$

とおいてやると

$$L = \sum_{j=1}^{Z} \frac{m}{2}[\dot{z}_j^{(0)2} + \dot{\rho}_j^{(0)2} + \rho_j^{(0)2}\dot{\varphi}_j^{(0)2}] - V(z_j^{(0)}, \rho_j^{(0)}, \varphi_j^{(0)}) + O(H^2) \tag{9-118}$$

すなわち，H^2 の項を無視する近似においては，上の L は磁場のないときのものと一致する．したがって磁場のないときの解がわかれば，(9-117) の変換で弱い磁場のあるときの解が求まることになる†．(9-117) の変換を直交座標系で表わせば

$$x_j^{(0)} = \rho_j^{(0)} \cos\varphi_j^{(0)}, \qquad x_j = \rho_j \cos\varphi_j, \qquad \text{その他の式}$$

を用いて

$$\begin{aligned} x_j &= x_j^{(0)} \cos\left(\frac{eH}{2mc}t\right) - y_j^{(0)} \sin\left(\frac{eH}{2mc}t\right) \\ y_j &= x_j^{(0)} \sin\left(\frac{eH}{2mc}t\right) + y_j^{(0)} \cos\left(\frac{eH}{2mc}t\right) \\ z_j &= z_j^{(0)} \end{aligned} \tag{9-119}$$

そこで磁場がないときに系全体が振動数 ν の周期運動をしていたとすると，xy 平面内の運動の振動数は上式より

$$\nu \pm \frac{eH}{4\pi mc} \tag{9-120}$$

となり，z 方向の振動数は

$$\nu \tag{9-121}$$

となる．このように振動数が磁場により分岐する現象を Zeeman 効果と呼び，上の結果を Larmor の定理と呼ぶ．

$$\frac{eH}{4\pi mc} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{eH}{2mc}\right) \tag{9-122}$$

† たとえば，朝永振一郎，“量子力学 I”（みすず書房）の第3章参照．

は Larmor 振動数と呼ばれる．この振動数を測定することにより原子内の電子の e/m を測ることができる．この測定により原子内電子と陰極線中の電子とが同じものであることが確証されたのである．

陰極線中の電子は原子核に束縛されていないから，一定の電場で加速してやれば $(e/m)\boldsymbol{E}$ なる加速度を受けるから，これにより速度の変化を測るとか，一定の磁場で曲げてやればその曲率半径と速度を測ることにより (9-102) 式から (e/m) を知ることができるのである．

第 10 章

運動方程式の解の家族 II

第 8 章で議論したように運動方程式の一つの解を知れば，時空の対称性に基づいてそれと密接に関連している解の一族を得ることができる．またこのような対称性は保存則と対応していることがわかった．

そこで得られた保存則は，実は古典物理学と量子力学とに共通なもので，物理学の基本的法則である．この章でも同様な議論を展開するが，この章で対象となる対称性は，第 8 章で述べたような連続的な対称性ではなくて離散的である．したがって常に連続的変化のみを対象とする古典物理学では保存則とは結びつかない．これらの対称性は，実は量子力学においてはじめて保存則と結びつくのである．

10-1 時間反転

ある現象を撮影し，そのフィルムを映写するときに逆回ししたとしたらスクリーンに現われる現象は我々の世界の自然法則を満たしているであろうか？

我々の経験では否定的のように思われる．たとえば死んだ人が生き返るというようなことはありそうにもない．しかしながら第4章で議論したように，マクロの世界ではすべての自由度について測定をすることは不可能なので，少数の集団変数のみに着目して種々の現象を記述し，大部分の自由度は無視されている．したがって現象の正確な記述というよりも統計的記述に限定され，状態の完全なコントロールがされていないことになるので，我々の経験は多分に確率的である．死んだ人が生き返るというような確率も非常に小さくても0ではないかもしれない．ただしあまりにも小さい確率でしか生起しないので我々が経験できないだけかもしれない．したがってこのような問題を調べるのには自由度の小さいミクロの系について考えるべきであろう．マクロの世界では，自由度を減らすために力学系の性質を色々と理想化する．無視された自由度は凍結されているとする．この凍結された自由度が励起されるとこのような自由度は力学変数として扱われていないので，力学的エネルギーが熱になり，確率論的には非可逆過程として現われることになる．しかしながら完全に理想化された力学系の運動法則は可逆である．ここでは可逆な系の性質について調べることにしよう．

現象を撮影するときに時計も一緒に撮ったとしよう．我々の世界での時刻を t としたときに，映写された時刻は一般に

$$2\tau-t \tag{10-1}$$

という形の時刻を示すであろう．t が増加すればスクリーン上の時計はどんどん逆戻りしてゆくからである．フィルムをいつ映写するかで τ の値は色々と変わる．そして $t=\tau$ を基準に時間を反転させたということができる．このときに $2\tau-t=t$ となるからである．もちろんこの時刻は外挿によって得られる．同時に撮映と映写はできないからである．このような時間反転の演算を $T(\tau)$ で表わす．

$$T(\tau):\ t\rightarrow 2\tau-t \tag{10-2}$$

与えられた力学系の運動法則が時間的に可逆であるということは，もし (8-1) が運動方程式の解であれば

$$\boldsymbol{r}'_j=\boldsymbol{f}_j(2\tau-t) \tag{10-3}$$

もやはり解であることを意味する[†]．ただし τ は任意であるとする．このようにして τ を色々と変えると解の新しい一族が得られる．第5章で議論したような力学系に対しては確かに上の条件は満たされている．すなわち，

$$t'=2\tau-t \tag{10-4}$$

とおいたときに

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_j}{dt^2}=\frac{d^2\boldsymbol{r}_j}{dt'^2} \tag{10-5}$$

であるから，いずれの t を用いても運動方程式の形は全く同じになる．問題になるのは運動方程式に速度が現われる場合である．このことを議論する前に可逆性のための必要条件を述べておこう．

二つの T 演算を続けて行うと

$$T(\tau_2)T(\tau_1):t\rightarrow 2\tau_1-t\rightarrow 2\tau_2-(2\tau_1-t)=t+2(\tau_2-\tau_1) \tag{10-6}$$

これは，t を $t+2(\tau_2-\tau_1)$ でおき換える変換で，このおき換えをしても解がやはり解になるという条件になり，第8章の時間の均一性で議論した (8-32) の変換になる．すなわち，$\tau=2(\tau_2-\tau_1)$ とおけば，(10-6) は (8-32) に帰着される．したがって直ちに次の結論が得られる．

定理　可逆な力学系ではエネルギーが保存される．

そこで次に運動方程式が速度を含む場合を考えてみよう．

第3章で取り扱った摩擦の問題で (3-56) は速度を含んだ方程式となる．しかしこの場合には (3-84) により，エネルギーは保存されない．ゆえに上の定理によってこの系は非可逆であり，運動エネルギーは摩擦熱に転化してしまう．以上は典型的な可逆系と非可逆系の例であるが，第9章で議論した Lorentz の力はもう少し複雑である．たとえば方程式 (9-89) を考えてみよう．この解は (9-97)，(9-98) で与えられるが，(10-3) を書いてみると解にはならない．その意味では可逆ではないが，この系ではエネルギーが保存されている．そこで可逆性の定義を，(10-3) が解になるということよりも拡張して解釈しなければならない．実際 (10-3) の変換をした解の性質を調べてみると，(9-93) の右辺の符号を変えた次の方程式を満たしている．

---

† Euler の方程式 (5-73)，(5-74)，(5-75) についても似たようなことがいえる．もしも $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{g}(t)$ が解であれば $\boldsymbol{\omega}'=-\boldsymbol{g}(2\tau-t)$ も解である．

$$\dot{v}_x' = -\omega v_y', \qquad \dot{v}_y' = \omega v_x \tag{10-7}$$

そこで ω の符号，あるいは (9-92) により H の符号も同時に変えてやると元の方程式の解になっている．すなわち，方程式 (9-89) の解を

$$\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{f}_j(t, \boldsymbol{H}) \tag{10-8}$$

と書いたときに，

$$\boldsymbol{r}_j' = \boldsymbol{f}_j(2\tau - t, -\boldsymbol{H}) \tag{10-9}$$

も解である．この意味でこの系は可逆である．

この拡張された可逆性の物理的解釈には磁場発生の機構を知らなければならぬ．電磁気学によれば，磁場というものは電流のような荷電粒子の運動——回転を含む——によって生ずる．いまフィルムを逆転させると荷電粒子の運動方向が逆転するから，したがって磁場の方向も逆転する．すなわち，磁場は外から与えられたものと考えたが，上述の機構を考えると，(10-9) のごとく向きを逆転させる方が自然である．このことをもっと深く調べるためには，電磁場の運動を支配する Maxwell の方程式の可逆性を論じなければならない．」

10-2 鏡　映

人間にとって鏡というものは不思議な存在である．我々の知っている世界とそっくりな世界が鏡の中に現われるからである．古代の迷信では鏡に映る影は魂であり，それを見ると死ぬという伝説があった．

鏡の中の世界の特色は，右と左とが逆になっていることである．我々が右手に何かを持っていると鏡の中の人間は左手に何かを持っているように見えるのである．そこで時間反転のときと同様に，次の設問をしてみよう．

"鏡の中の像の運動は，我々の世界の運動法則を満たしているであろうか？" もし答が肯定的ならばどうなるであろうか？

そこで我々の世界と鏡の中の世界との関係を調べてみよう．まず鏡の位置はどのように選んでもよいものとしよう．それは我々の世界が均一で，鏡を置くべき特定の位置，特定の方向はないと仮定しているからである．そこで鏡の面を xy 平面に選ぶと，実際の質点の位置 $\boldsymbol{r}$ と鏡の中の像の位置 $\boldsymbol{r}'$ との間には，次の関係がある．

$$x'=x, \qquad y'=y, \qquad z'=-z \tag{10-10}$$

これを xy 平面に関する鏡映と呼ぶことにする．一般に平面 a に関する鏡映を $R(a)$ で表わすことにする．まず a を任意の平面としたときに，運動法則は $R(a)$ に関して不変であるということを仮定しよう．そうするとこの系の運動法則は，二つの平面 a_1, a_2 を選んだときに

$$R(a_2)R(a_1) \tag{10-11}$$

なる積に関しても不変である．以下では二つの場合についてこの結果を調べてみる．

1)　a_1 と a_2 とが平行な場合

2平面 a_1 と a_2 とが平行な場合というのは，床屋のように前後に2枚の鏡が置いてあるときである．a_1 と a_2 とに垂直に z 軸を選び，a_1 と a_2 との方程式をそれぞれ

$$z=z_1, \qquad z=z_2 \tag{10-12}$$

と選ぶことにする．そうすると $R(a_1)$ は $(z-z_1)$ を (z_1-z) に変える変換であるから

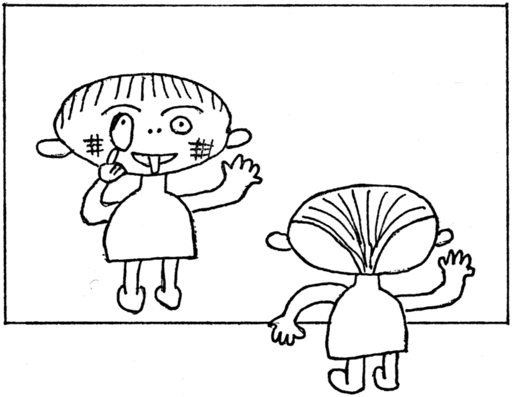


図 10-1　鏡　　映

鏡は昔から人間に色々な想像を強いる存在であった．鏡の中の世界は我々の世界の物理法則に従うであろうか？　鏡の中の像が我々の世界の物体とは独立に運動し始めることはないだろうかと考えて，我々は時々不安を感ずることがある．

$$R(a_1):z-z_1 \to z_1-z, \text{ あるいは } z \to z'=2z_1-z \tag{10-13}$$

したがって

$$R(a_2)R(a_1):z \to 2z_1-z \to 2z_2-(2z_1-z)=z+2(z_2-z_1) \tag{10-14}$$

すなわち，このような座標系の選び方に対して，$R(a_2)R(a_1)$ という変換は

$$x'=x, \qquad y'=y, \qquad z'=z+2(z_2-z_1) \tag{10-15}$$

という平行移動を表わすことになる．これを一般化して (8-5) 式の変換

$$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}$$

が得られる．このような平行移動に対する不変性は，第8章で示したように運動量の保存則につながる．したがって

定理 鏡映に対して不変な力学系においては運動量が保存される．

2) a_1 と a_2 とが平行でない場合

2平面 a_1, a_2 が平行でない場合には，この2平面は一直線で交わる．この交線を z 軸に選ぼう．しからば2平面の方程式はそれぞれ

$$y=x\tan\varphi_1, \qquad y=x\tan\varphi_2 \tag{10-16}$$

のごとく表わされる．このときに $R(a_1)$，$R(a_2)$ という変換は，xy 平面上の極座標で表わすと便利である．すなわち

$$x=\rho\cos\varphi, \qquad y=\rho\sin\varphi \tag{10-17}$$

としたときに，2平面はそれぞれ

$$\varphi=\varphi_1, \qquad \varphi=\varphi_2 \tag{10-18}$$

で表わされる．このとき

$$R(a_1):\varphi-\varphi_1 \to \varphi_1-\varphi, \text{ あるいは } \varphi \to \varphi'=2\varphi_1-\varphi \tag{10-19}$$

$$R(a_2)R(a_1):\varphi \to 2\varphi_1-\varphi \to 2\varphi_2-(2\varphi_1-\varphi)=\varphi+2(\varphi_2-\varphi_1) \tag{10-20}$$

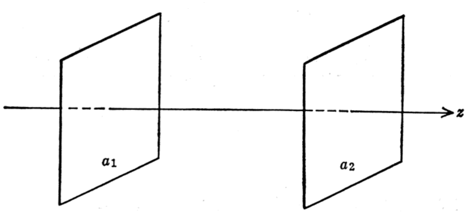


図 10-2 二つの鏡 a_1, a_2 が平行な場合の鏡映の合成
本文参照.

となって，z 軸の周りの回転となる．一般に平面 a_1, a_2 を色々と選べば，任意の軸の周りの回転が得られる．運動法則が空間回転に対して不変であれば，角運動量は保存される．したがって

定理　鏡映に対して不変な力学系においては角運動量が保存される．

さてこの系では回転不変性が保証されているから (10-10) の鏡映と xy 平面における z 軸の周りの 180° の回転とを合成すると

$$x'=-x, \qquad y'=-y, \qquad z'=-z \tag{10-21}$$

これを空間反転と称する．上述のものは原点を固定した空間反転であるが，運動法則がこの反転に対して不変であれば，平行移動と空間回転に対する不変性とを組み合わせて，任意の鏡映に対して不変であることがわかる．

さて第5章で考えた質点系の Lagrangian

$$L=T-U=\sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j^2-\sum_{i<j} U(r_{ij}) \tag{10-22}$$

は明らかに空間反転

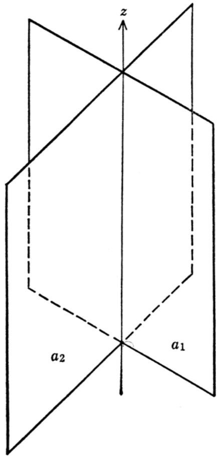


図 10-3　二つの鏡 a_1, a_2 が平行でない場合の鏡映の合成 1
本文参照.

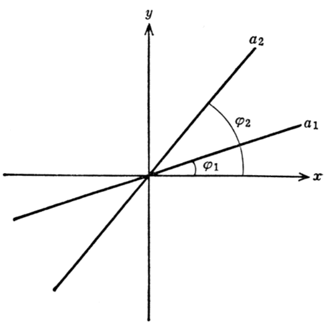


図 10-4　二つの鏡 a_1, a_2 が平行でない場合の鏡映の合成 2
本文参照.

$$\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r} \tag{10-23}$$

に対して不変である．

次に電磁場の変換性について調べてみよう．時間反転のときには

$$T: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{H} \tag{10-24}$$

であったが，空間反転では逆になる．ポテンシャルは空間反転に対して不変だが，その微分である電場は符号を変える．また方程式 (9-89) において，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$ とは符号を変えるから，$\boldsymbol{H}$ は符号を変えない．したがって

$$R: \boldsymbol{E} \to -\boldsymbol{E}, \ \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H} \tag{10-25}$$

空間反転に対して符号を変えないベクトルを軸性ベクトルと呼ぶ．磁場 $\boldsymbol{H}$，角運動量 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 等は典型的な軸性ベクトルである．

このように，時間反転と空間反転，および第8章で与えた時空座標の平行移動，および空間回転とを組み合わせると，一つの解から出発してもっと大きな解の集団，解の家族を得ることができる．次の章では更に，ミクロの世界に現われる荷電共役について議論する．

第 11 章

右手系と左手系とは区別できるか

第2章でベクトル積を定義するときに右手系を用いた．しかし第 10 章での議論では，鏡映により右手系と左手系とはお互いに移り変わるので，自然法則が鏡映に対して不変であれば右手系と左手系とを区別することはできないことになる．そこで問題となることは，右手系と左手系とは原理的に区別ができないものであるかということである．卑近な例をあげれば，まず子供に右手と左手とをどのようにして教えたらよいであろうか？　そもそも人間の世界では，歴史的現実として右と左とでは対称ではない．

子供に右と左とを教えるには，右手はお箸を持つ手であり，左手はお碗を持つ手であるということがある．しかし左利きの人も居る．日本では左利きの子供は矯正されて右利きにされてしまうので上のような教え方でも通用するかもしれない．しかしながらアメリカでは，左利きを矯正すると心理的によくない効果があるという理由で矯正はされない．したがって上のような区別はアメリカでは通用しない．しかしながら一般的に右利きの人が左利きの人よりも多いことは確かである．そこで大多数の人がお箸を持つ手，あるいは西欧ならばナ

イフを持つ手が右手であると定義することができるであろう．このことは現在事実であるだけでなく，昔からそうだったようである．その証拠には，大昔の人々が洞穴等に残した絵画を見ても，右手に武器を持って狩をしているからである．このことは，あるいは人間の心臓がほとんどの人の場合に左にあるということと無関係ではないかもしれない．また人間社会のみではなく，他の生物の場合にも左右非対称性が見られる．たとえば，巻貝等も巻き方が決まっていたり，また植物のつるの巻き方が決まっていたりする．しかしながら生物の場合の非対称性は直ちに自然法則の非対称性とは結びつかない．たとえば右巻きのつる草と左巻きのつる草があったとしても，何らかの偶然で右巻きのみが残ってしまい，その後は遺伝によって右巻きだけになったかもしれない．同様に人間社会で右利きが多いということも歴史的地理的偶然かもしれない．どこか遠くの星に人間そっくりの生物が住んでいて，そこでは皆が心臓を右にもち，左手で箸を握っているかもしれない．すなわち，右利きが多いということは，地球上だけの局地的現象かもしれないのである．

そこで右手系と左手系の区別の問題を考えるときには，伝統とか歴史などの過去に影響されない簡単な力学系としてミクロの世界の素粒子に着目してみよう．

話は 1950 年代に遡る．それまですべての物理学者は鏡映，あるいは空間反転に対してすべての物理法則は不変であると信じていた．ところが当時非常に奇妙な素粒子が見つかったのである．この素粒子を K 中間子と呼ぶ．K 中間子は湯川理論において予言された π 中間子よりも新しく発見され，かつ π 中間子よりも重く，電荷は $\pm e$ のものと 0 のものとがある．特に電荷をもったものを考えると 10^{-8} sec くらいの寿命で崩壊してしまう．崩壊という現象は放射性原子核が，α 線，β 線，γ 線等を出して異なる原子核に変身してしまうのと似た現象であり，荷電 K 中間子の場合には

$$\mathrm{K}^+ \to \pi^+ + \pi^0, \qquad \mathrm{K}^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-, \qquad \text{その他} \tag{11-1}$$

のごとく，突然2個，あるいは3個の π 中間子に転化してしまう．ここに π^+, π^0, π^- はそれぞれ電荷 $+e$, 0, $-e$ をもった π 中間子を意味する．このような現象に関与する相互作用は第9章の初めに述べた相互作用の分類では弱い相互作用である．また第9章で議論した重力および電磁的相互作用に対して

は，第10章に述べたように空間反転に対する不変性が成り立っているらしいが，弱い相互作用についてはどうであろうか？　詳細は省略するが，K中間子が2個，あるいは3個の π 中間子に崩壊するという現象は，空間反転に対する不変性を仮定したのではどうしても説明ができないのである．そこで1956年に，Lee と Yang という二人の中国系物理学者は，弱い相互作用は空間反転に対して不変ではないのではないかといい出した．その後弱い相互作用に関する多くの実験が行われ，この不変性が破れていることが種々の過程において確立された．

ここでは一つの例を与えよう．

π^- 中間子を陽子 p にぶつけると，しばしば次の過程が生ずる．

$$\pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \Lambda^0 + \mathrm{K}^0 \qquad (11\text{-}2)$$

ここに π 中間子は強い相互作用である核力を説明するために導入された素粒子であるから，陽子 p と強い相互作用をもっている．その強い相互作用の結果として，陽子 p はもっと重い素粒子 Λ^0 に，そして π^- ももっと重い中間子 K^0 に励起される．(11-2) の過程は一つの平面を定義する．すなわち，入射してくる π^- の運動量を $\boldsymbol{p}_{\mathrm{in}}$, Λ と K との運動量をそれぞれ $\boldsymbol{p}_\Lambda$, $\boldsymbol{p}_{\mathrm{K}}$ とし，標的の陽子は初めは静止していたとする．すると運動量の保存則より

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{in}} = \boldsymbol{p}_\Lambda + \boldsymbol{p}_{\mathrm{K}} \qquad (11\text{-}3)$$

したがってこの3個の運動量は同一平面上にある．次に Λ^0 は 10^{-10} sec くらいの寿命でしばしば次のように崩壊する．

$$\Lambda^0 \rightarrow \mathrm{p} + \pi^- \qquad (11\text{-}4)$$

このときに出て来た π^- の運動量を $\boldsymbol{p}_{\mathrm{out}}$ とすると，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{out}}$ は一般に上述の平面内にはない．したがって上述の平面に垂直な成分があり

$$(\boldsymbol{p}_{\mathrm{out}}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{in}} \times \boldsymbol{p}_\Lambda) \qquad (11\text{-}5)$$

は一般には0ではない．ところでこの表現にはベクトル積が入っているので，この定義は右手系を使った場合と左手系を使った場合とでは符号が逆である．したがって自然法則が右手系と左手系とに対して対称的になっていれば，(11-5) は正のことも負のこともあるが†，平均としては0になるであろう．と

† このようなことは崩壊現象を確率論的に解釈してはじめて理解しうる．これについては第12章を参照．

ころが実験的にはこの平均値は 0 にならない．すなわち，空間反転に対する不変性が，強い相互作用（11–2）か，弱い相互作用によって生ずる（11–4）のいずれか，あるいは両方で破れていることになる．通常この不変性の破れは，弱い相互作用のせいにされている．また上述の非対称性は右手系と左手系との区別を可能にする．

たとえば，あるエネルギーの入射 π^- 中間子に対して，（11–5）の平均値が正であったとする．そのとき右手と左手とを次のように区別することができる．

上述の実験を行って，（11–5）の平均値を調べなさい．もし $\boldsymbol{p}_{\mathrm{in}}\times\boldsymbol{p}_{\Lambda}$ を定義するときにあなたが右手を使っていればこの量の平均値は正になるし，逆に左手を使って定義したとしたら負になるでしょう．そこで加速器を一つ作って上述の実験をしてみれば，客観的に右と左との区別がつくことになる．さて以上の話は地球上で問題を論ずる限りは難癖のつけようがないが，遠く離れた星の住人にも同じ話が通じるであろうか？

この問題を議論するためにまず荷電共役の話に移る．上述の結論は，鏡の中の世界が必ずしも我々の世界の運動法則を満たしていないことを示している．特に弱い相互作用が関与するとそうである．したがって運動法則の違いを利用して，我々が現実の世界に住んでいるのか，それとも鏡の中の世界に住んでいるのかを区別する方法が存在することが上で指摘されたのである．ところでミクロの世界に移ると，マクロの世界では知られていなかった対称性がある．これは相対論と量子力学とを組み合わせて得られる結論であるが，一つの素粒子 a が存在すると必ずそれに対して反粒子と称する素粒子 $\bar{a}$ が存在するということである．ある素粒子とその反粒子とは必ず同じ質量をもち，種々の性質が全く同じであるが，ただ電荷の符号が逆である．そこで次のような素粒子の反応を考える．

$$a+b \to c+d \tag{11–6}$$

このような過程が生起するならばその逆過程も必ず生起する．さて代数方程式において移項という演算があり，右辺の項を左辺に，あるいは左辺の項を右辺に移すことができるが，その際に符号を変えなければならぬ．素粒子の反応式でも同様なことが可能である．ただし粒子 a を移項するときに，代数方程式

のように a を $(-a)$ に換えても意味がないので，その代りに a を $\bar{a}$ に換える．すなわち，a をその反粒子 $\bar{a}$ にして移項すればよい．例をあげると，次の素粒子反応は可能である．

$$\nu+\mathrm{n} \to \mathrm{p}+\mathrm{e}^- \tag{11-7}$$

ここに p，n，e^- はそれぞれ陽子，中性子，電子を表わし，ν はニュートリノと呼ばれる電荷0で質量0の粒子である．この ν を移項すると

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p}+\mathrm{e}^-+\bar{\nu} \tag{11-8}$$

この過程は原子核の β 崩壊に寄与する基本的な反応である．さてある素粒子からなる系とその素粒子を全部反粒子でおき換えた系とは全く同じ運動法則を満たすと考えられてきた．このように素粒子をその反粒子でおき換える変換を荷電共役と呼ぶ．たとえば電子 e^- と陽子 p とからなる水素原子と，その反粒子の陽電子 e^+ と反陽子 $\bar{\mathrm{p}}$ とからなる反水素原子とは全く同じエネルギー準位をもつ．素粒子とその反粒子の他の例をあげれば，π^+ と π^- とはお互いに反粒子であり，π^0 とか光子 γ とかは自分自身の反粒子である．

弱い相互作用では，空間反転に対する不変性が否定されると同時に，荷電共役に対する不変性も否定された．素粒子とその反粒子とは，弱い相互作用を通してわずかながら異なる振舞いを示すのである．そこで Landau その他の人々は次のようなことを考えた．空間反転も荷電共役もいずれの不変性も破れているが，両者を組み合わせたものは不変ではないだろうか？　この考えは当時知られていたすべての実験事実とうまく符合していたので，多くの人々はそれを正しいと信じていた．

そこでいま一つの魔法の鏡を考える．ある素粒子の運動を鏡に映すと右と左が逆になるが，この点は普通の鏡と同じであるが，鏡に映った素粒子は反粒子に見えるという不思議な鏡である．Landau の考えは，ある現象をこの魔法の鏡に映すと，その鏡の中の像の運動は我々の世界と同じ運動法則に従うということである．しかもこのことは弱い相互作用を含めて成り立つというのである．もしこの考えが正しければ，上に述べた右手系と左手系との区別は再び不可能となる．すなわち，(11-2)，(11-4) とをこの鏡に映すと

$$\pi^+ + \bar{\mathrm{p}} \to \bar{\Lambda}^0 + \bar{\mathrm{K}}^0 \tag{11-9}$$

$$\bar{\Lambda}^0 \to \bar{\mathrm{p}} + \pi^+ \tag{11-10}$$

となるであろう．そこで入射する π^+, $\overline{\Lambda}^0$ およびその崩壊から生ずる π^+ の運動量をそれぞれ $\overline{\boldsymbol{p}}_{\text{in}}$, $\boldsymbol{p}_{\overline{\Lambda}}$, $\overline{\boldsymbol{p}}_{\text{out}}$ として (11-5) に対応して

$$(\overline{\boldsymbol{p}}_{\text{out}}, \overline{\boldsymbol{p}}_{\text{in}} \times \boldsymbol{p}_{\overline{\Lambda}}) \qquad (11\text{-}11)$$

なる量を考える．仮定により，この量の平均値は (11-5) と等しくてやはり正になるであろう．ところが鏡の中の世界ではベクトル積を定義するのに左手系を使っていることになるのである．すなわち，我々の世界では右手系を使うと確かに (11-5) の平均値は正になったが，魔法の鏡の世界では左手系を使うと正になるのである．したがって地球上のように素粒子 p, Λ 等々から成り立っている世界でなら通用した判別法が，反粒子 $\overline{\text{p}}$, $\overline{\Lambda}$ あるいは反物質から成り立っている世界では通用しなくなってしまうのである．そこで遠くの星の住人に右手系と左手系との区別を教えるには，その世界が物質の世界――すなわち，その世界では原子核が陽子と中性子とからなる――であるか，それとも反物質の世界――すなわち，その世界の原子核は反陽子と反中性子とからなる――であるかを知らなければならない．

もし Landau の考えが正しかったとしたらこの区別は原理的にできない．ところが Landau の考えた不変性がわずかだが破れていることが1964年になってわかった．すなわち，それまで知られていた弱い相互作用よりも3桁も弱い相互作用によってこの不変性が破れているのである．その経緯を詳しく述べることは止めにして結果のみについて述べよう．

中性の K 中間子に K_L と書かれ，約 10^{-7} sec の寿命をもつものがある．この粒子はたとえば次のような崩壊をする．

$$\text{K}_\text{L}^0 \to \pi^+ + \text{e}^- + \bar{\nu} \qquad (11\text{-}12)$$

$$\text{K}_\text{L}^0 \to \pi^- + \text{e}^+ + \nu \qquad (11\text{-}13)$$

(11-12) の崩壊を魔法の鏡に映したものが (11-13) になる．Landau の仮定した不変性が正しければこの両者の生起する確率は同じはずである．ところが，前者が後者よりも約 0.1% の程度多く起きていることがわかったのである．この違いはわずかであるが，その意味するところは重大である．

遠くの星の住人に対して，その世界が物質の世界であるか反物質の世界であるかを判別する方法を教えてやれるからである．物質の世界で水素原子といえば e^- と p とからなるが，反物質の世界の住人にとって水素原子といえば

e^+ と $\bar{p}$ とからなるものを意味する．もし反物質の世界の住人が我々と直接接触しなければ，彼らは反物質の世界に住んでいるか物質の世界に住んでいるか知りようがなかったであろう．ところが上述のわずかな非対称性がこの判別を可能にしてくれる．彼らに $\bar{K}_L^0$ の崩壊を調べさせるのである．そして (11-12) と (11-13) と彼らが信ずる崩壊を比較させるのである．もしわずかに大きい確率で生ずる過程 (11-12) から出る電子 e^- が彼らの電子と一致すれば，彼らは物質の世界に住んでおり，逆ならば彼らは反物質の世界に住んでいるのである．それがわかれば既に述べた方法により右手系と左手系との区別を教えることができるのである．右と左の区別という一見簡単なことのように思える問題が，実はこのように複雑な問題であるということがわかったと思う．しかもその手掛りが得られたのはやっと 1964 年になってからである．

第 12 章

古典力学の限界

12-1　決定論としての古典力学

古典力学の特徴は物理量の連続的変化を記述する決定論であり，物質構造の問題には深入りせずにできるだけ理想化された簡単な体系を取り扱う現象論であるということについて述べた．

決定論ということは与えられた初期条件の下に運動方程式の解が一意的に定まってしまうことを意味し，ある瞬間に宇宙のすべての粒子，場の状態を知ることができたとしたら，未来は完全に決定され，未来についていくらでも正確な予言ができることになる．実際問題としては一秒先のことを予言するのに百万年の計算を必要とするかもしれないが，重要なことは未来のことが原理的に予測可能ということである．また現象論であるということの意味は，原子・分子の世界にまで入り込むと，第 4 章で述べたように水素原子の安定性でさえも説明できないので，マクロの物体をあるがままに受け入れて，その重心運動と

か重心の周りの回転とかの大雑把な性質にのみ着目するという態度を指しているのである．

古典力学，あるいはもっと一般的には古典物理学の破綻については既に第4章で述べ，なぜ量子論が必要であるかということを物質構造の面から説明した．この章では論理構造の面から決定論としての古典力学の欠陥を指摘し，新しい理論の必要性を強調してみたい．決定論という論理と矛盾する現象は数多くあるが，ここでは例として放射性元素について考えてみよう．

12-2　放射性元素と確率論的解釈

1896年に Becquerel は放射性元素を発見し，絶対不変であると考えられていた元素が実は変化しうるものであることがわかってきた．放射性元素とは，その原子核自身が不安定で，α 線，β 線，γ 線等を出して他の原子核に転化するような元素のことである．α 線とはヘリウムの原子核であり，2個の陽子と2個の中性子とから成り立っており，したがって電荷 $2e$ をもち，原子核が α を放出すると原子番号 Z の原子核は，$(Z-2)$ の原子核になる．このような α を他の原子核に散乱させて，その大きさを測るという Rutherford 散乱については既に第9章で述べた．

β 線とは電子のことで，電子は $(-e)$ の電荷をもつので原子番号は，β を出すと Z から $(Z+1)$ に変わる．この過程は本質的には，原子核中の中性子が前章の (11-8) により陽子に転化し，電子を出す過程であるが，この過程には実験的に見つかり難いニュートリノが含まれているので，その最終的理解にはかなり時間がかかった．ニュートリノの存在を仮定しないと，この過程は

$$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p}+\mathrm{e}^{-} \tag{12-1}$$

と解釈される．ところでニュートリノと電子とがわけ合うエネルギーは一定していないから，上の過程の電子は色々なエネルギーをもって出て来る．その結果 Bohr は，かつてこの過程ではエネルギー保存則が成り立たないのではないかと考えたことさえあったのである．ニュートリノの存在は Pauli により仮定され，Fermi による β 崩壊の理論が提唱されたのは1934年のことである．

自然界には，α と β とを交互に出してだんだん移り変わってゆく放射性原

子核の系列がある．この際に，中性子と陽子の数の和は，4 の倍数しか変わらないことになるから，その和を示すと，Thorium 系列 ($4n$)，Uranium 系列 ($4n+2$)，Actinium 系列 ($4n+3$) 等があり，いずれも Pb (鉛) の同位元素にまで崩壊してゆく．それではこのような崩壊はどのような法則に支配されるであろうか？

ある時刻 t に存在する放射性原子核の数を $N(t)$ として，その時間的変化を記述する方程式は通常次の形に書かれる．

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \tag{12-2}$$

この方程式の解は $t=0$ において $N(t)=N(0)$ という初期条件を与えれば，次のごとく与えられる．

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \tag{12-3}$$

λ は原子核の種類によって決まっている定数である．特に数が半分に減るのに要する時間 τ を半減期と呼ぶ．すなわち

$$e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2}, \quad \text{あるいは} \quad \tau = \frac{1}{\lambda}\log_e 2 \tag{12-4}$$

この半減期は原子核の種類によって長短様々である．」

n^1	:	10.6 分
H^3	:	12.33 年
C^{14}	:	5692 年
Na^{26}	:	1 秒

我々にとって関心のあるのは崩壊の法則 (12-2) の解釈である．これは $N(t)$ を人間社会における人口とすると，λ は死亡率に相当する量である．ただし誰ももう生まれてこないとする．いま半減期 τ だけ経つと半分の原子核が崩壊する．問題はその半数をいかにして選ぶかということである．この問題は人間の死亡率等とは本質的に違っている．

人間の場合には個性があり，一人々々の肉体的条件が異なり，弱った者から死んでゆくということで納得がゆくのだが，原子核の場合に，たとえば多数の C^{14} 原子核があった場合に，すべての原子核は完全に同じで個性がないのであるから，どの半数を選ぶかという問題に対しては全く選択の基準がない．それ

にもかかわらず半数を選べということになれば，神様もくじ引きのような手段に頼らざるをえないであろう．実際に自然はくじ引きをするのである．そしてこの瞬間から自然は決定論を捨て，確率論に宗旨変えをしたということができる．すなわち，どの半数を選ぶかについて先験的な基準がないので，どの半数が崩壊するかについて全く予言することができない．このことは決定論の立場とは著しく矛盾するのである．

また本質的には上の問題と同じであるが，一つの放射性原子核は長い時間の間にいつかは崩壊するであろうが，正確にいつ崩壊するかということになると全く予言できない．かくして個性のないミクロの世界を支配する法則は決定論ではなくて確率論であると結論せざるをえない．第4章で議論した水素原子についても全く同様な事情が存在する．励起状態にある水素原子がいつ光子を放出して低いエネルギー準位に落ちるかは全く予測できない．このときにもこの系を支配している法則は確率的であると結論せざるをえない．この際に確率的解釈を我々に強いるものは，エネルギー準位の不連続性である．もしもエネルギー準位のスペクトルが連続であれば，水素原子は時々刻々連続的に低い準位に移ってゆくという決定論的解釈も可能であるかもしれない．しかしながら第4章で述べたごとくこれでは水素原子の安定性が説明できないのである．したがって確率論的解釈は，無個性のミクロの世界では必然的結果であると結論できるであろう．

12-3 確率論的運動方程式

決定論を放棄して確率論を採用するとしたら運動方程式はどのような形を採るべきかについて考えてみよう．具体的には量子力学の方程式がこれに答えるべきものであるが，いま量子力学について論ずることが目的ではない．

理論が決定論から確率論に移ったときに，その理論での基礎方程式はどのような形を採るべきかについて純粋に論理的な思索を展開してみよう．

水素原子が E_2 という励起状態にある確率，それが光子と基底状態とになる確率というように，お互いに移り変われる状態の組を考える．

一般にある物理量 Q を測定したときに，その値が $q_1, q_2, \cdots$ となるような

確率を $P_1, P_2, \cdots$ としよう．与えられた物理量がどのような値をとりうるかという問題は固有値問題と呼ばれ，量子力学の問題であるのでここでは触れないことにする．我々が興味をもっているのはむしろ $P_1, P_2, \cdots$ という確率の時間的変化を支配する運動方程式の形である．そこで色々と試行錯誤を繰り返しながら正しい法則の形を求めてみよう．

与えられた系が，単位時間につき状態 i から状態 j へ移る確率を a_{ji} とすれば，確率論的に考えうる最も簡単な方程式は

$$\frac{dP_i}{dt}=\sum_j a_{ij}P_j-\sum_j a_{ji}P_i \tag{12-5}$$

第1項は単位時間に他の状態から i という状態に流れ込んでくる確率を表わし，第2項は逆に i から他の状態へ流れ出る確率を表わす．上式で $i=1$ の場合以外の P_i は小さいとして無視できるとして右辺第1項を省略してやりかつ

$$P_1=\frac{N(t)}{N(0)}, \qquad \sum_j a_{j1}=\lambda \tag{12-6}$$

とおいてやれば，方程式 (12-2) が再現される．しかしながら (12-5) の方程式は種々の点で不満足である．たとえば第 10 章で述べた可逆性の条件を満たしていない．可逆性といった性質は，エネルギー・運動量の保存則等と同様に当然古典力学から量子力学に継承されるべき性質と考え，可逆性の条件を満たすにはどうしたらよいかを古典力学を復習することによって探してみよう．

古典力学では運動方程式が時間について二階微分を含んでいるということが大切であることは，(10-5) 式より明らかである．ところで変数の数を，位置座標の代りに位置座標と運動量というように，2倍に増すことにより，運動方程式を時間について一階の微分方程式に書ける．たとえば，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F} \tag{12-7}$$

という式は，運動量 $\boldsymbol{p}$ を導入することにより

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}, \qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{\boldsymbol{p}}{m} \tag{12-8}$$

のごとく，二つの一階微分方程式に分解される．可逆性は確かに考慮すべき一つの条件であるから変数の数を2倍することを考えてみよう．

ミクロの世界では光子の例からわかるように，同一の対象が場合によっては粒子のごとく，また他の場合には波動のごとく振る舞う．そこでミクロの世界の力学には波動性をうまく取り入れなければならない．さて波の強度という正定値の量は振幅の自乗であり，干渉とか回折のような波動現象は，振幅の符号が正負いずれでもよいので二つの振幅がお互いに強め合ったり弱め合ったりすることで表現される．そしてこの振幅が波の運動を支配する波動方程式を満たすのである．したがって我々も正定値の確率 P_i を強度とみなしたときに，確率振幅と呼ばれる振幅 a_i を導入し，

$$P_i=a_i^2 \tag{12-9}$$

とおいてみよう．この式は確率 P_i が負にならないことを保証してくれる．更に可逆性のために，変数 a_i の組のほかに b_i という組を導入し，変数の数を2倍にしておく．そして (12-8) を真似して次のような方程式系を考える．

$$\frac{da_i}{dt}=\sum_j A_{ij}b_j, \qquad \frac{db_i}{dt}=\sum_j B_{ij}a_j \tag{12-10}$$

この係数 A_{ij}, B_{ij} に対して確率の保存則が成り立つという条件を課してみる．すなわち，Q を測定した結果が，$q_1, q_2, \cdots$ のいずれか一つになる確率は1であるから

$$\sum_i P_i=1 \tag{12-11}$$

これに (12-9) を代入して t について微分すると

$$\frac{d}{dt}\sum_i a_i^2=2\sum_{i,j} a_iA_{ij}b_j=0$$

ところで (12-10) では a_i, b_i に対して任意の初期条件を与えることができるから，上の式は A_{ij} が恒等的に0になることを要求し，a_i の時間的変化をうまく表現できない．そこで (12-9) を次のように改良する．

$$P_i=a_i^2+b_i^2 \tag{12-12}$$

そして (12-11) の時間微分が0になるようにすると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sum_i (a_i^2+b_i^2)&=2\sum_{i,j}(a_iA_{ij}b_j+b_iB_{ij}a_j)\\&=2\sum_{i,j}a_i(A_{ij}+B_{ji})b_j\\&=0\end{aligned} \tag{12-13}$$

すなわち，確率の保存則は

$$B_{ji}=-A_{ij} \tag{12-14}$$

により表現される．簡単のために A_{ij} は i, j につき対称

$$A_{ji}=A_{ij} \tag{12-15}$$

であると仮定すると，(12-10) 式は

$$\frac{da_i}{dt}=\sum_j A_{ij}b_j, \qquad \frac{db_i}{dt}=-\sum_j A_{ij}a_j \tag{12-16}$$

この式をまとめて複素振幅を導入すると便利である．

$$c_j=a_j+ib_j \tag{12-17}$$

とおけば，確率 P_j を表わす式 (12-12) は

$$P_j=|c_j|^2 \tag{12-18}$$

となり，方程式 (12-16) は一つにまとめて

$$i\frac{dc_j}{dt}=\sum_k A_{jk}c_k \tag{12-19}$$

なる形に書かれる．

実際問題では A は実数で対称という条件は強過ぎるので，この条件を外すと，方程式の一般形は (12-19) と同形で

$$i\frac{dc_j}{dt}=\sum_k H_{jk}c_k \tag{12-20}$$

となる．確率の保存則を保証する条件は

$$H_{jk}=H_{kj}^* \tag{12-21}$$

となる．ただし $*$ は複素共役を表わす．(12-21) を満たす行列 H をエルミート行列と呼ぶ．

方程式 (12-20) を Schrödinger 方程式，行列 H をこの系の Hamiltonian と呼ぶ．これ以上具体的なことは量子力学の問題である．決定論から確率論へ移ったときに，運動方程式の形がどのように変わるべきかについて一つの純粋に抽象的な思考を展開してみた．

古典力学についての本が，古典力学のあら探しで終わってしまったが，もちろん我々の日常生活を支配している自然法則は古典物理学によって十分正確に

代表されていて，その有用性は高く評価されるべきである．

付　録

主軸変換問題

第5章で慣性テンソルを導入した．この量を用いて回転エネルギーを表現すると

$$T_R=\frac{1}{2}\sum_{a,b}I_{ab}\omega_a\omega_b \qquad \text{(A-1)}$$

であり，この量は (5-69) の座標変換に対して不変である．すなわち，T_R の値は座標系の選び方によらないはずである．したがって I_{ab} の変換性は

$$\sum_{a,b}I_{ab}\omega_a\omega_b=\sum_{a,b}I'_{ab}\omega'_a\omega'_b \qquad \text{(A-2)}$$

によって与えられる．もっと一般化すると，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ がベクトルであれば

$$\sum_{a,b}I_{ab}u_a v_b=\sum_{a,b}I'_{ab}u'_a v'_b \qquad \text{(A-3)}$$

のごとく変換するときに I_{ab} を二階のテンソルと呼ぶ．さて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3=u'_1\boldsymbol{e}'_1+u'_2\boldsymbol{e}'_2+u'_3\boldsymbol{e}'_3\\ \boldsymbol{v}&=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3=v'_1\boldsymbol{e}'_1+v'_2\boldsymbol{e}'_2+v'_3\boldsymbol{e}'_3\end{aligned} \qquad \text{(A-4)}$$

しからば

$$u_a=\sum_c u'_c(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}'_c), \qquad v_b=\sum_d v'_d(\boldsymbol{e}_b, \boldsymbol{e}'_d) \tag{A-5}$$

これを (A-3) に代入すると

$$\sum_{a,b}\sum_{c,d} I_{ab}(\boldsymbol{e}_a\boldsymbol{e}'_c)(\boldsymbol{e}_b\boldsymbol{e}'_d)u'_c v'_d=\sum_{c,d} I'_{cd}u'_c v'_d$$

これから

$$I'_{cd}=\sum_{a,b} I_{ab}(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}'_c)(\boldsymbol{e}_b, \boldsymbol{e}'_d)$$
$$=\sum_{a,b}(\boldsymbol{e}'_c, \boldsymbol{e}_a)I_{ab}(\boldsymbol{e}_b, \boldsymbol{e}'_d)$$

そこで $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}'_j)$ を (i, j) 成分とする行列を S, I_{ij} を (i, j) 成分とする行列を I とすると

$$I'=S^T IS=S^{-1}IS \tag{A-6}$$

S は直交行列であり，S を適当に選べば I' を対角形にできる．このような S と I' とを求める問題を主軸変換問題と呼ぶ．この問題を解くには行列式に関する知識が必要であり，それがこの問題を付録に追いやった原因である．

行列 I は対称であるとする．

$$I^T=I \tag{A-7}$$

この問題を解くには次のような斉次方程式を考える．

$$\sum_b I_{ab}x_b=\lambda x_a \tag{A-8}$$

あるいは

$$\sum_b (I_{ab}-\lambda\delta_{ab})x_b=0$$

この方程式が $x_1=x_2=x_3=0$ 以外の解をもつための必要かつ十分なる条件は，上の方程式の x の係数の作る行列式が 0 となることである．

$$\det(I-\lambda E)=0 \tag{A-9}$$

ただし E は単位行列であり，$I-\lambda E$ なる行列から作られる行列式を上のごとく書く．さて 3 行 3 列の行列の場合に，(A-9) は λ について三次方程式となるから 3 根がある．

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3 \tag{A-10}$$

そしてそれぞれの λ に対して x が求まったとする．この λ はすべて実数である．それは (A-8) から

$$\sum_{a,b} I_{ab} x_a^* x_b = \lambda \sum_a x_a^* x_a$$

が出るが，この左辺は $I_{ab}^* = I_{ab} = I_{ba}$ により実数，右辺の λ の係数も実数だからである．したがって x も実数に選ぶことができる．そこで λ_j に対する x の成分を (s_{1j}, s_{2j}, s_{3j}) とすると

$$\sum_b I_{ab} s_{bj} = \lambda_j s_{aj} \tag{A-11}$$

更にこの s を次のごとく規格化しておく．

$$\sum_a s_{aj}^2 = 1 \tag{A-12}$$

しからば s_{ij} を (ij) 成分とする行列を S としたときに

$$IS = SI' \tag{A-13}$$

ただし

$$I' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{A-14}$$

また (A-11) より

$$\sum_a I_{ab} s_{ai} = \sum_a I_{ba} s_{ai} = \lambda_i s_{bi} \tag{A-15}$$

そこで (A-11) と (A-15) から

$$\sum_{a,b} I_{ab} s_{ai} s_{bj} = \lambda_j \sum_a s_{ai} s_{aj} = \lambda_i \sum_b s_{bi} s_{bj} \tag{A-16}$$

したがって

$$(\lambda_i - \lambda_j) \sum_a s_{ai} s_{aj} = 0 \tag{A-17}$$

$\lambda_i \neq \lambda_j$ ならば

$$\sum_a s_{ai} s_{aj} = 0 \tag{A-18}$$

(A-12) と一緒にすると

$$\sum_a s_{ai} s_{aj} = \delta_{ij}$$

ただし $i \neq j$ ならば，$\lambda_i \neq \lambda_j$ としたが $\lambda_i = \lambda_j$ になるときでもこの式が成り立つように s を選べる．この式を行列で表わし

$$S^T S = E \tag{A-19}$$

したがってこの S は直交行列になり，(A-13) から

$$S^{-1}IS=I'$$

は対角形となる．

参　考　書

本書で取り扱った題目は主として力学であるが，いわゆる解析力学に属する正準形方程式については述べていない．これは多少の数学的準備を必要とするからである．

もっと進んだ取扱いについては多くの力学の教科書があるので参考にされたい．たとえば

山内恭彦　一般力学（岩波書店）

伏見康治　古典力学（岩波書店）

原島　鮮　一般力学（河出書房）

また古典力学の教科書ではあるが，量子力学を意識して書かれたものとして特色のあるのは

高橋　康　解析力学入門（講談社）

索　引

さ 行

ま 行

や 行

ら 行

<著者略歴>

西島和彦（にしじま かずひこ）

1948年 東京大学理学部物理学科卒業
1950年 大阪市立大学理工学部助手
1954年 大阪市立大学理工学部講師
1955年 理学博士
1959年 大阪市立大学理工学部助教授
1959年 University of Illinois 物理学科教授
1966年 東京大学理学部教授
現在にいたる

物理学の廻廊

力学系と自然法則　　定価 1800 円

昭和53年12月7日 初　版
昭和61年3月5日 第5刷

著　者　西　島　和　彦
発行者　森　田　勝　久
発行所　産業図書株式会社
東京都千代田区飯田橋 2-11-3
郵便番号 102
電　話 東京（261）7821（代）
振替口座 東京 2-27724 番

新日本印刷・関口製本

ISBN4-7828-1101-2 C3342

「物理学の廻廊」刊行によせて

高校の物理を一通り学んだ者が更に深く物理を勉強しようとする場合に色々な選択がありうる．通俗的な解説書により大要を掴もうとするのも一方法であり，また正統的な教科書により勉強するのも一方法である．しかしながら前者にあっては，靴を隔てて痒きを掻くの感がしないでもない．すなわち肝心の本体の周りでどうどう巡りをしていていつまで経っても本当にわかったような気がしないという焦躁感にかられることがある．これは数理科学である物理学を数式抜きで理解しようとするところにその原因があるのではなかろうか．高校の物理以上のことを理解しようという意欲のある者にとっては，初等的な数式による記述はかえって理解を深めるための助けになるのではないだろうか．また後者の正統的な教科書で学ぶ方法は最善かもしれないが，通常この方法では，力学・電磁気学等の各分野をそれぞれ初めから勉強し直す．

しかし高校で一応勉強した者にとっては繰返しが多過ぎるのではないかと思われる．高校の物理と比較すると，本質的なことは変わらないのに用いられている数学的表現のみが高度になっているという場合が多い．

高校の数学では微積分を習うのに，高校の物理では不思議なことに微積分が使われていないので，一つの方程式から出て来る結果をばらばらに暗記しなければならないことがよくある．そもそも微積分は物理との関連において発達した数学の分野であることを考慮すると，この制限はいかにも不自然である．実際に高校以上の物理を学ぶのに必要な数学は，少数の例外を除いては高校で習う数学だけでほとんど十分なのである．

そこで本シリーズにおいては，高校で習った物理と数学の知識に基づいて色々な分野の関連を考え，あまり狭い枠組にとらわれずに物理学を概観することを試みた．また一冊一冊が小冊子であるので，すべての分野を詳細に，百科辞典式に記述することは初めから考えず，最重要綱目としてすべての分野に共通な概念に重点を置くという方針を採った．

このようなもくろみが成功するかどうかはわからないが，このような考え方が少しでも読者のお役に立てば幸いである．

西島和彦